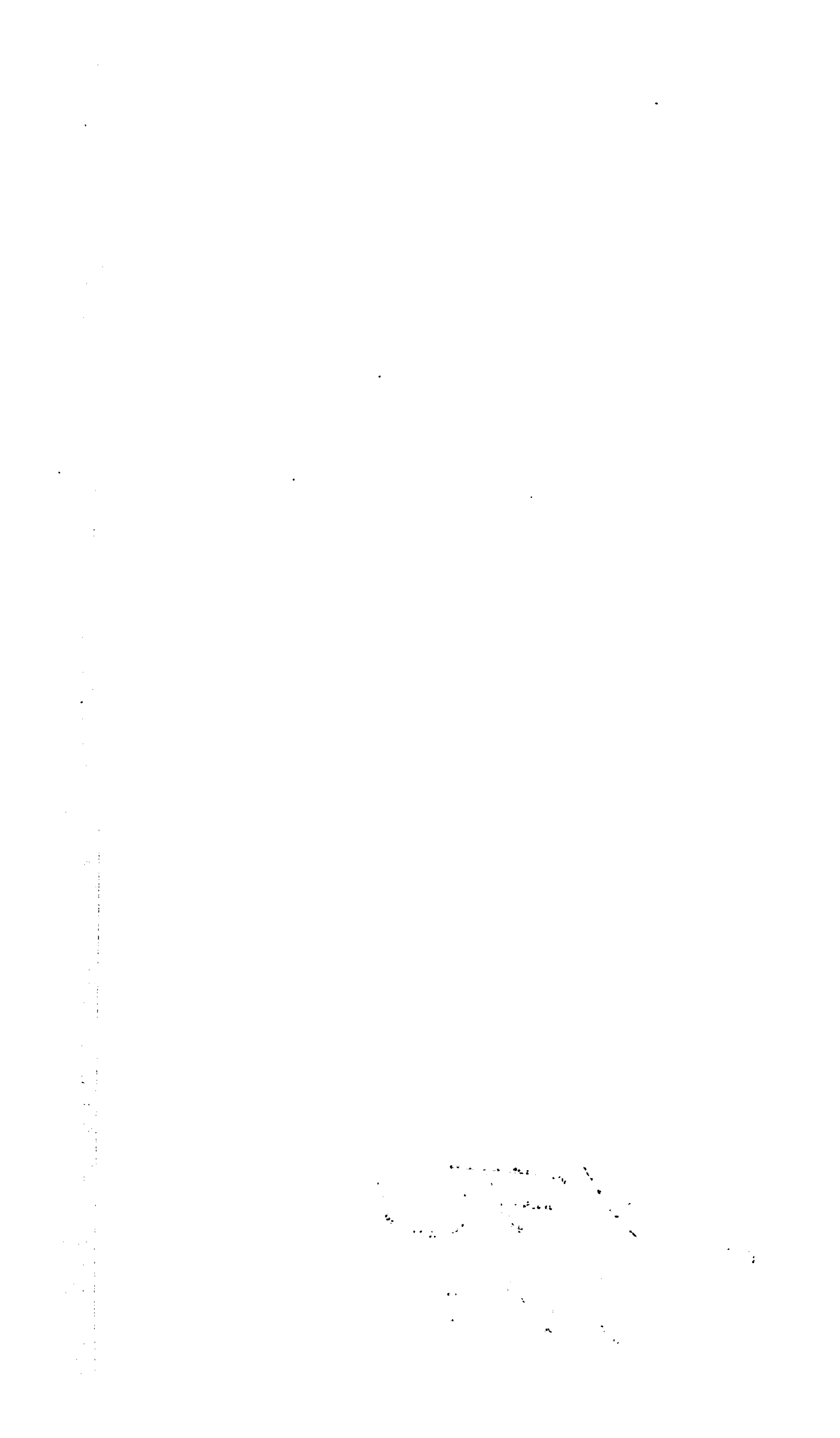




Arithmetic-Application

ANFANGSGRÜNDE

DER

ZAHLENARITHMETIK

UND

BUCHSTABENRECHNUNG

ZUM

GEBRAUCHE BEI VORLESUNGEN

VON

CONRAD DIEDRICH MARTIN STAHL,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE UND PRIVATDOCENT
ZU JENA.

JENA UND LEIPZIG,
BEI CHRISTIAN ERNST GABLER.
1797.

SEINEN

VEREHRUNGSWÜRDIGSTEN LEHRERN

UND

FREUNDEN

DEM HERRN

JOHANN FRIEDRICH PFAFF,

PROFESSOR DER MATHEMATIK ZU HELMSTÆDT

UND

DEM HERRN

JOH. CHRISTIAN LUDEWIG HELLWIG,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AM GYMNASIUM CATHARINEUM ZU BRAUNSCHWEIG

WIDMET

DIESE SCHRIFT

EHRFURCHTSVOLL



DER VERFASSER.

Vorbericht.

Ehe ich in Jena anfing, als Privatdocent über die Mathematik Vorlesungen zu halten, hatte ich schon vorher öfters Gelegenheit gehabt, über die einzelnen Theile der Mathematik zu unterrichten, und mich immer bemüht, bei meinem Vortrage einen eigenen Weg zu gehn, in der Ueberzeugung, daſs ich nur auf diese Weise den ganzen Nutzen schöpfen könnte, welchen man sich selbst von dem Unterrichtgeben verspricht und daſs ich auch bloſs hierdurch in den Stand gesetzt würde, meinen Vortrag interessant zu machen. Ich erreichte meinen Zweck, fühlte nun aber die Unbequemlichkeit, welche ein Jeder fühlen muſs, der sich eine eigene Methode des Vortrags erworben hat und nach fremden Büchern unterrichten soll. Vorzüglich war dieses bei der Arithmetik der Fall, bei welcher ich beständig Zusätze machen und Veränderungen treffen muſste. Hierdurch wurde mein Vortrag unordentlich, ich fing daher an, nach eigenen Dictaten zu unterrichten, fand aber bald, daſs mich das Dictiren zu lange aufhielt und sah mich aus diesem Grunde genöthigt, diese Schrift drucken zu

las-

laſſen, ehe ich eine andere herausgeben konnte, welche von der Analyſis des Unendlichen handelt und meine erſte Schrift ſeyn ſollte, welche ich dem Publikum zur Beurtheilung meiner Fähigkeiten vorlegen wollte. Den Inhalt meiner Zahlenarithmetik und Buchſtabenrechnung wird leicht ein jeder Mathematikverſtändiger überſehn, auch wird er bald wahrnehmen, worin ich von der bisherigen Vorſtellungsart abgewichen bin, ich kann mich daher hierüber kurz faſſen. Das Geſchäft des Arithmetikers beſteht eigentlich nur in Zählen, in ſo fern nämlich als ſein Zweck iſt, Zahlen zu finden. Die Arithmetik muſs folglich von dem Begriffe Zahl ausgehn und alles übrige aus dieſem zunächſt herleiten, wenn ſie anders als Wiſſenſchaft angeſehn werden ſoll, daher dieſes der Geſichtspunkt war, von welchem ich ausging. Man pflegt gewöhnlich den Begriff von entgegengeſetzten Gröſsen erſt aufzuſtellen, wenn man ſchon von den vier Rechnungsarten geſprochen hat, ich ſehe aber nicht ein, wie man von dieſen einen vollſtändigen Begriff mittheilen kann, wofern man nicht ſchon jenes aus einander geſetzt hat. Aus dieſem Grunde habe ich hierinn die Ordnung des bisherigen Vortrags geändert.

Bei der Multiplication bediene ich mich der Redensart, das Multiplicand nach dem Geſetze des Multiplicators multipliciren, weil der Multiplicator ſagt, unter welcher Form das Multiplicand gedacht werden ſoll. Eben ſo ſage ich bei der Diviſion, das Dividend wird nach dem Geſetze des Diviſors dividirt, weil der Diviſor die Form beſtimmt, un-ter welcher man das Dividend denken muſs. Ich b

ke

kein Liebhaber von Veränderungen des einmal eingeführten Sprachgebrauchs, wenn ich aber so natürlich darauf geführt werde, wie in den beiden angeführten Fällen, so glaube ich mir eine erlauben zu dürfen. Die grösste Abweichung von der bisherigen Vorstellungsart einzelner Materien, wird man bei der Lehre von den Dignitäten finden. Ich halte die hier beobachtete für die einzige richtige, weil nur durch sie in diese Lehre Deutlichkeit und Vollständigkeit gebracht wird. Ich verfiel auf diese Idee, ohne vorher dazu einen Wink erhalten zu haben, fand sie aber nachher, nur etwas verändert, in Kästners Dissertatione XI. Dissertationum Mathematicarum et Physicarum Altenburgi 1771. editarum vorgetragen, ohne dass jedoch daraus die Sätze für die Dignitäten hergeleitet sind. Wenn ich also auch nicht auf den Begriff, welchen ich mit Dignität verknüpfe, zuerst gekommen bin, so habe ich doch wenigstens aus ihm, so viel als mir bekannt ist, zuerst die Lehre der Dignitäten entwickelt. Zur Erklärung des binomischen Lehrsatzes wollte ich anfangs mich der Hindenburgischen Methode bedienen, aber ich fand für die Combinationslehre keinen Platz und würde auch durch sie weiter geführt worden seyn, als mein Zweck verstattete. Die Lehre von den Logarithmen habe ich vollständiger vorgetragen, als man sonst in den Anfangsgründen der Arithmetik zu thun pflegt, weil es vermittelst der vorhergehenden Sätze geschehn konnte und gewiss auch einem jeden Anfänger nöthig ist von den Logarithmen mehr zu wissen, als die mehrsten Lehrbücher davon enthalten.

So

So viel als ich weiſs, hat de la Grange zuerſt allgemein gezeigt, wie die Polygonalzahlen in regulären Figuren dargeſtellt werden können, ohne jedoch den Beweis für die Richtigkeit ſeines Verfahrens zu geben; ich habe es daher nicht für unnütz gehalten, meinen gefundenen Beweis hinzuzufügen. Da er aber auſser arithmetiſchen Kenntniſſen, auch Kenntniſſe in der Elementargeometrie vorausſetzt, ſo habe ich ihn meiner Arithmetik beſonders angehängt. Die praktiſche Rechenkunſt iſt aus dieſer Schrift weggelaſſen, weil ich es für zweckmäſsiger hielt, ihre Sätze bei den Vorleſungen einzeln als Beiſpiele vorzutragen.

So bald es die Umſtände erlauben und der Kenner Urtheil über dieſe Schrift mich aufmuntert, werde ich ihr eine andere über die Hindenburgiſche combinatoriſche Analyſis und die Algebra, und hierauf eine dritte über die Lehre von den Functionen und Analyſis des Unendlichen folgen laſſen.

An-

Anfangsgründe der Zahlenarithmetik und Buchstabenrechnung.

Erstes Kapitel.

1. Von dem Begriffe Zahl überhaupt.

§. 1.

Erklärung.

An mehrern Dingen A, B, C, D u. s. f. mögen ausser eigenen auch gemeinschaftliche Merkmale wahrgenommen werden. Den Inbegriff der leztern will ich x nennen, und nur dieses x vor Augen haben. Hier denke ich also ein und dasselbe, nämlich x, aber ich denke es wiederholt, folglich muss dieses x durch den Ort der Reihe, in welcher ich es denke, unterschieden werden. Zähle ich die Anwendung des Denkacts, welchen x erfordert und durch dessen Wiederholung eine Reihe von x entsteht, so erhalte ich eine Zahl. Entweder bleibe ich nun beim Zählen gleich bei dem ersten Gliede der Reihe stehen, oder gehe bis zu einem gewissen Gliede fort, oder setze mir beim Fortgange in der Reihe keine Grenze. Dieses gibt nach der genannten Ordnung, die Einheit, eine endliche, bestimmte Zahl, eine unendlich grosse Zahl. Eine Zahl ist also nichts anders, als Resultat des Zählens, es wird dadurch bestimmt, wie oft ich einen gewissen Denkact wiederholt habe. Wird nun ausdrüklich gesagt, von

welchem x die Rede ist, so heisst die Zahl eine benannte, wird dies aber nicht gesagt, so heisst sie eine unbenannte.

§. 2.

Will man anzeigen, was für eine Zahl gedacht wird, so bedient man sich eines Zeichens, was Zahlzeichen, auch schlechtweg Zahl genannt wird. In diesem Sinne ist also Zahl nichts anders, als Symbol einer Zahl. Das Symbol für eine bestimmte unbenannte Zahl ist schon ein allgemeines Zeichen, weil es bloss anzeigt, wie oft ein gewisser Denkact wiederholt ist, aber mit dem Denkacte selbst nicht bekannt macht. Aber ein noch allgemeineres Zeichen ist das, welches mir erlaubt anzunehmen, wie oft ein gewisser Denkact wiederholt, und was für ein Denkact wiederholt seyn soll. Zu einem solchen allgemeinen Zeichen bedient man sich der Buchstaben, und zwar der ersten Buchstaben des Alphabets, wenn von bekannten, und der lezten Buchstaben des Alphabets, wenn von unbekannten Zahlen die Rede ist.

2. Von dem decadischen Calcul.

§. 3.

Willkührlicher Satz.

Man muss nothwendig für eine jede Zahl ein eigenes Zeichen haben; wollte man nun für eine jede Zahl ein einziges besonderes Zeichen wählen, so müsste man sich mit unendlich vielen Symbolen bekannt machen. Dies kann man aber vermeiden, wenn man nur eine gewisse Anzahl von besondern Zeichen wählt, diesen aber einen besondern Werth nach der Stelle gibt, in welcher wir sie von der Rechten nach der Linken, oder von der Linken nach der Rechten wahrnehmen. Nach der Festsetzung der Anzahl der Zeichen und nach dem besondern Werthe, den ihnen ihre Stelle gibt, entstehn verschiedene Zahlensysteme, von welchen hier nur das decadische betrachtet werden soll.

In diesem Systeme rechnet man die Stellen der Zeichen von der Rechten nach der Linken, und bedient sich folgender Sym-

Symbole: (1. Eins), (2. Zwei), (3. Drei), (4. Vier), (5. Fünf), (6. Sechs), (7. Sieben), (8. Acht), (9. Neun), und nennt ein jedes dieser Zeichen, im allgemeinen, Ziffer, wovon eine jede, ausser der ersten, einen Inbegriff von mehrern Einheiten darstellt. Die erste enthält eine Einheit, die darauf folgende eine und noch eine Einheit u. s. w., so dass Drei, eine Einheit mehr besitzt, als Zwei, und Vier wieder eine Einheit mehr, als Drei u. s. w. Setzt man zu Neun Einheiten noch eine Einheit, so hat man zehen Einheiten. Der Werth der Einheiten einer jeden dieser Ziffern hängt so von ihrer Stelle ab, dass wenn sie um eine Stelle weiter nach der Linken rückt, dass alsdenn eine jede ihrer Einheiten ein Inbegriff von zehn ihrer vorigen Einheiten wird.

Um nun eine jede Ziffer in eine beliebige Stelle von der Rechten nach der Linken setzen zu können, bedient man sich eines kleinen Zirkels, den man Null nennt. Die Einheiten einer Ziffer in der ersten Stelle heissen Einer, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderter, in der vierten Tausender, in der fünften Zehntausender, in der sechsten Hunderttausender, in der 7ten Millioner u. s. w.

Die Ziffer, welche Zehner enthält, heisst eine Zahl der ersten Ordnung, die Ziffer, welche Hunderter enthält, ist eine Zahl der zweiten Ordnung u. s. w. Einer haben also gar keine Ordnung.

Will man daher in einer Zahl, die Ziffern von verschiedenen Ordnungen, oder welches einerlei ist, Ziffern von verschiedenen Klassen in sich begreift, bestimmen, zu welcher Ordnung eine Ziffer, die in ihr vorkömmt, gehört, so muss man ihre Stelle von der Rechten nach der Linken zu zählen.

Hierauf gründet sich das Lesen der Zahlenschrift, oder wie man sich auch wohl sonst ausdrückt, die Regel eine Zahl auszusprechen, die aus mehrern Ziffern besteht.

§. 4.

Aufgabe.

Eine Zahl zu lesen, die mehrere Ziffern enthält.

Auflösung.

Man verbindet bei dem Lesen die Ziffern, welche zu verschiedenen Ordnungen gehören, durch das Verbindungswort und, so dass man die von der höchsten zuerst, und die von der geringsten zuletzt nennt, so sagt man z. B. eine Million und fünfhundert tausend und sechzig. Aber gewöhnlicher ist es, das und bloss zwischen die Ziffer der geringsten Ordnung, die in der Zahl vorkömmt, und zwischen die zunächst vorhergehende zu setzen, so sagt man in dem vorigen Beispiele: eine Million fünfhundert tausend und sechzig. Auf solche Art lassen sich sechs Ziffern leicht aussprechen. Sollte aber eine gegebene Zahl mehr als 6 Ziffern haben, so verfährt man folgendermassen:

Man schneidet von der Rechten nach der Linken zu so oft 6 Ziffern ab, als es sich will thun lassen, und spricht die Ziffern eines jeden Abschnitts so aus, als wenn sie allein da wären, nennt aber die Ziffer des ersten Abschnitts, welche am weitesten zur Rechten steht, Einer, die Ziffer des zweiten Abschnitts, welche am weitesten zur Rechten steht, Millionen u. s. w. Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quinquillionen u. s. f.

Um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, bezeichnet man die Millionen mit einem Striche, die Billionen mit zwei Strichen, die Trillionen mit drei Strichen u. s. f.

Beispiel:

$54''' 579035'' 586701' 906713.$

Diese Zahl durch Worte ausgedrückt, heisst: Vier und funfzig Trillionen, fünfhundert neun und siebenzig tausend und fünf und dreissig Billionen, fünfhundert sechs und achtzig tausend siebenhundert und eine Million, Neunhundert sechstausend siebenhundert und dreizehn.

§. 5.

Aufgabe.

Eine durch Worte ausgedrückte Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Auf-

Auflösung.

Man schreibe eine Reihe Nullen hin, bemerke die Nullen der Millionen mit einem Striche, die der Billionen mit zwei Strichen u. s. w., und schreibe eine jede Ziffer der vorgesagten Zahl unter die ihr zukommende Stelle.

Anmerkung.

Wenn man diese Regel öfters anwendet, so erhält man bald eine mechanische Fertigkeit, eine jede, auch noch so grosse vorgesagte Zahl, mit Ziffern zu schreiben, ohne vorher nöthig zu haben, eine Reihe Nullen hin zu setzen.

---

3. Von den gebrochnen Zahlen überhaupt.

§. 6.

Erklärung.

Eine Grösse A ist ein Theil von einer andern B, wenn zu ihr noch etwas hinzukommen muss, damit sie B wird. In diesem Falle heisst A ein **Bruch** von B, und B ist in Rücksicht auf A das **Ganze**.

C kann aber wieder ein Theil von A seyn, und dann ist C ein Bruch in Rücksicht auf A, und A ein Ganzes in Rücksicht auf C. Der Begriff **Bruch** und **Ganzes** ist also relativ.

1. Zusatz.

Dass also B von G ein Bruch ist, hängt davon ab, dass B nur ein Theil von G ist. Es wird daher auch B als Bruch einen grössern oder kleinern Werth haben, nachdem B von G ein grösserer oder kleinerer Theil ist. Spricht man also von dem Werthe eines Bruchs, so spricht man nur von dem relativen Werthe, den er in Hinsicht auf das Ganze hat.

2. Zusatz.

1) Der Werth des Bruchs B nimmt zu, wenn B, für sich betrachtet, wächst, das Ganze aber unverändert bleibt.

2) Der Werth des Bruchs B nimmt zu, wenn B, für sich betrachtet, unverändert bleibt, aber das Ganze abnimmt.

3) Der Werth des Bruchs B wird kleiner, wenn B für sich betrachtet abnimmt, das Ganze aber unverändert bleibt.

4) Der Werth des Bruchs B wird kleiner, wenn B für sich betrachtet unverändert bleibt, das Ganze aber wächst.

5) Der Werth des Bruchs B nimmt ab, wenn B für sich betrachtet kleiner wird, und das Ganze zunimmt.

6) Der Werth des Bruchs B nimmt zu, wenn B für sich betrachtet wächst, und das Ganze abnimmt.

3. Zusatz.

Der Werth des Bruchs ist bekannt, wenn man weiss, wie vielmal B für sich betrachtet zu sich selbst gesetzt werden muss, wenn B das Ganze werden soll, oder wenn man weiss, was zu B noch gefügt werden muss, wenn B gleich dem Ganzen werden soll.

4. Zusatz.

Der Werth eines Bruchs wird also bestimmt:

1) Wenn man G durch B misst, weil man hierdurch erfährt, wie oft B zu sich selbst gesetzt, G macht.

2) Oder wenn man das Ganze und den Bruch durch einen gemeinschaftlichen Maasstab misst. Denn hierdurch erhält man eine Zahl für den Bruch und eine für das Ganze, und wenn man diese beiden Zahlen mit einander vergleicht, so erfährt man, was zu B noch gefügt werden muss, damit daraus G wird.

§. 7.

Erklärung.

Die Zahl, welche sagt, wie oft der gemeinschaftliche Maasstab in B enthalten ist, heisst Zähler, und die Zahl, welche sagt, wie oft der gemeinschaftliche Maasstab in G enthalten ist, heisst Nenner.

§. 8.

Erklärung.

Steht ein Theil B zu seinem Ganzen G in dem Verhältnisse, dass mehrere B das ganze G ausmachen, so ist B ein

ali-

aliquoter Theil von G. Steht B mit G nicht in diesem Verhältnisse, so ist B ein aliquanter Theil von G.

Zusatz.

Ist der Bruch B' von G ein aliquoter Theil, so ist B ein gemeinschaftlicher Maasstab für B und G, also der Zähler gleich 1. (§. 7. Erklär.) Ist aber B von G ein aliquanter Theil, so ist der Zähler eine Zahl grösser als 1, und der Nenner eine Zahl grösser als 1.

Willkührlicher Satz.

Will man einen bestimmten Begriff von dem Werthe eines Bruchs haben, so muss man Zähler und Nenner kennen. Ein Zeichen, was uns also mit dem Werthe von dem Bruche bekannt machen soll, muss beides enthalten. Das Zeichen, was man hierzu gebraucht, ist daher folgendes: Man schreibt den Zähler hin, setzt unter ihn den Nenner, und trennt diese beiden Zahlen durch einen Strich. Ein solches Symbol wird gebrochne Zahl genannt. Ein allgemeiner Ausdruck für eine gebrochne Zahl ist $\frac{Z}{N}$.

§. 9.

Aus §. 6. 2. Zus. und §. 8. folgt dieses:

1) Zwei gebrochne Zahlen sind unter sich gleich, wenn ihre Zähler und Nenner unter sich gleich sind.
2) Wenn zwei gebrochne Zahlen gleiche Nenner haben, so ist diejenige die grösste, die den grössten Zähler hat.
3) Wenn zwei gebrochne Zahlen gleiche Zähler haben, so ist diejenige die grösste, die den kleinsten Nenner hat.
4) Wenn eine gebrochne Zahl $\frac{Z}{N}$ einen kleinern Zähler und einen grössern Nenner hat, als $\frac{z}{n}$, so ist $\frac{Z}{N}$ kleiner, als $\frac{z}{n}$.
5) Wenn zwei gebrochne Zahlen mit verschiedenen Nennern unter sich gleich seyn sollen, so muss der, der

den grössten Zähler hat, auch den grössten Nenner haben.

§. 10.

Der Zähler Z kann bei dem Wachsen grösser werden, als der Nenner N. Dieser zeigt aber an, wie oft der gemeinschaftliche Maasstab in dem Ganzen enthalten ist, und der Zähler zeigt an, wie oft ihn der Bruch in sich begreift, folglich müsste in dem Falle, dass Z grösser wäre, als N, der Bruch grösser als das Ganze, oder es müsste G von B ein Bruch seyn. Eben so, kann auch das Ganze G ein Bruch von B werden, wenn der Nenner abnimmt, und der Zähler unverändert bleibt, oder wenn zwar Zähler und Nenner abnehmen, aber der Nenner in grösserm Grade, als der Zähler, oder wenn zwar Zähler und Nenner wachsen, aber der Zähler in grösserm Grade, als der Nenner. Will man dieser Verwandlung ungeachtet $\frac{Z}{N}$ eine gebrochne Zahl heissen, so dass sie nach wie vorher, den relativen Werth von B zu G anzeigt, so heisst sie eine uneigentlich gebrochne Zahl. Ein allgemeiner Ausdruck für eine solche Zahl ist $\frac{NZ+P}{N}$.

§. 11.

Lehrsatz.

Das Zeichen $\frac{A}{A}$ als gebrochne ~~Ziffer~~ Zahl betrachtet, ist mit dem Zeichen 1 einerlei.

Beweis.

Das Zeichen $\frac{A}{A}$ zeigt den relativen Werth einer Grösse P an, den sie in Hinsicht auf eine andere Q hat. Da nun hier Zähler und Nenner unter sich gleich sind, so muss die Grösse P gleich Q, d. h. der relative Werth von P in Rücksicht auf Q muss 1 seyn, folglich zeigt $\frac{A}{A}$ nichts anders, als 1 an.

§. 12.

§. 12.

Lehrsatz.

Das Zeichen $\frac{A}{1}$, als gebrochne Zahl betrachtet, ist mit A einerlei.

Beweis.

$\frac{A}{1}$ sagt, dass P, A mal so gross als Q, also dass der relative Werth von P in Hinsicht auf Q gleich A sey. Folglich sagt $\frac{A}{1}$ nichts anders, als A.

4. Von dem Begriffe, den man mit entgegengesetzter Grösse verknüpfen muss.

§. 13.

Erklärung.

Eine Bedingung ist der andern entgegengesetzt, wenn nicht ein und das nämliche unter beiden Bedingungen zugleich gedacht werden kann. Denkt man sich nun zwei Grösen von einerlei Beschaffenheit, d. h. solche, die sich nur durch den Ort, oder doch nur durch den Ort und die Quantität von einander unterscheiden, unter entgegengesetzten Bedingungen, so nennt man sie **entgegengesetzte Grösen.** Entgegengesetzte Grösen können also nach einander, d. i. in der Zeit, aber nicht zugleich oder so vereinigt gedacht werden, dass wir noch auf alle reflectirten; sondern sollen wir zwei entgegengesetzte, unter sich aber sonst gleiche, Grösen zusammen gefasst, also als *eine* denken, so heisst dies nichts anders, als wir sollen uns eine und dieselbe Gröse zu gleicher Zeit unter entgegengesetzten Bedingungen denken, dies ist aber unmöglich, folglich hören wir auf, auf sie zu reflectiren, d. h. sie verschwinden, als vereinigt gedacht. Sind zwei entgegengesetzte Grösen in Rücksicht auf ihre Quantität nicht unter sich gleich, und man soll sie sich vereinigt denken, so kann man

sich dieses so vorstellen: Man denkt sich hier drei Grössen vereinigt, nämlich die, um welche die eine grösser ist, als die andere, und die andern beiden unter sich gleichen. Diese beiden letztern heben sich also auf, und die erstere bleibt nur übrig, oder wir reflectiren nur auf den Theil der grössern Grösse, um welchen sie den kleinern übertrifft. Dieser Theil wird also unter der Bedingung gedacht, worunter die grössere Grösse gedacht wurde.

§. 14.

Willkührlicher Satz.

Die Bedingung, worunter man etwas schlechthin setzt, nennt man eine positive, und die, welche der positiven entgegengesetzt wird, nennt man die negative, und bezeichnet die positive mit $+$ und die negative mit $-$. Denkt man sich nun eine Grösse, z. B. A, unter der positiven Bedingung, so heisst sie eine positive, und wird mit $+$ bezeichnet, denkt man sie sich aber unter der negativen Bedingung, so sagt man, sie sey negativ, und bezeichnet sie mit $-$.

1. Zusatz.

Wenn man sich also zwei Grössen unter entgegengesetzten Bedingungen denkt, so ist es nicht ganz willkührlich, welche von ihnen die positive und welche die negative genannt werden soll, sondern die ist die positive, die unter der Bedingung gedacht wird, worunter man schon etwas gesetzt denkt, ohne dass ausdrücklich gesagt wird, unter welcher Bedingung sie gedacht wird. Daher muss man auch eine jede Grösse unter der positiven Bedingung denken, wenn durch kein Zeichen angegeben ist, ob sie positiv oder negativ sey.

2. Zusatz.

Bei $-$ A sagt also das Zeichen $-$, man soll sich A nicht als schlechthin gesetzt denken, sondern man soll sie sich unter einer Bedingung vorstellen, die der entgegengesetzt ist, worunter sie zuerst, als gesetzt, gedacht wurde. Wird daher $-$ B ausdrücklich als etwas gesetztes gegeben und nun verlangt, man soll sie sich negativ denken, so heisst dies nichts anders, als, man soll sie sich nicht mehr als $-$ B, sondern als $+$ B den-

denken. Diese Forderung zeigt aber das Zeichen + (— B) an, folglich ist — (— B) mit + B einerlei. Eben so läßt sich leicht zeigen, daß — (+ B) mit — B einerlei sey.

Zweites Kapitel.

1. Allgemeine Begriffe von den vier Rechnungsarten.

§. 15.

Die Handlung, wodurch eine Zahl verändert wird, kann nur darin bestehn, daß man entweder zu ihr Einheiten hinzuzählt, oder von ihr Einheiten abzählt. Dieses Zuzählen und Abzählen kann aus verschiedenen Absichten geschehn, und hiernach bekommen diese Handlungen verschiedene Namen:

1) Man kann die Absicht haben, die Zahlen a, b, c und d zusammen zu fassen, und wenn man a, b, c und d zusammen gefaßt hat, so kann

2) verlangt werden, daß man nicht a, b, c und d, sondern daß man sich bloß a, b und c zusammen gefaßt denken, also d aus der Verbindung mit den übrigen nehmen soll.

Geschieht das Zuzählen und Abzählen in der ersten Absicht, so addirt man, geschieht es in der zweiten Absicht, so subtrahirt man.

3) Es können zwei Zahlen A und B gegeben seyn, und nun kann verlangt werden, daß man eine Zahl darstellen soll, welche die Form in Hinsicht auf A hat, welche B in Hinsicht auf die Einheit, als schlechthin gesetzte, besitzt. Diese Form der B in Hinsicht auf 1, liegt in der Entstehung der B aus 1, also sagt jene Forderung, daß man eine Zahl entstehn lassen soll, eben so wie B entstand, nur daß man soll bei der gesuchten die Zahl A so zum Grunde legen, wie die Einheit bei B zum Grunde liegt.

Die ganze Handlung wird Multiplikation genannt, und da sie von dem Gesetze der B abhängt, so

so sagt man, es wird A nach dem Gesetze von B multiplicirt.

4) Wenn A nach dem Gesetze der B multiplicirt ist, und man hat hierdurch die Zahl P bekommen, so kann verlangt werden, dass man der P wieder die erste Form geben, dass sie also wieder zu A reducirt werden soll. Aber man ging ja so von A zu P, wie man von 1 zu B kam, folglich kömmt man auch wieder so von P zu A, wie man von B zu 1 kömmt. Daher heisst dies nichts anders, als, es soll der entgegengesetzte Weg von dem aufgesucht werden, auf welchem man von der Einheit zu B kam, und dann soll jeder Schritt, den man auf diesem Wege that, auch von P aus zurück gelegt werden.

Die ganze Handlung, die hier vorgenommen wird, heisst Division, und da sie wieder von dem Gesetze der B abhängt, so sagt man, es wird P nach dem Gesetze von B dividirt.

Erklärung.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division werden Species der Rechenkunst genannt.

2. Von der Addition überhaupt.

§. 16.

Die Addition setzt also voraus, dass mehreremale der Act des Zählens vorgenommen ist, und verlangt, dass man durch einen neuen Act alle die dadurch entstandenen verschiedenen Zahlen zusammen fassen soll. Die Absicht ist also bei der Addition immer die nämliche, aber die Handlung, die hierbei vorgenommen wird, hängt von den Bedingungen ab, unter welchen man sich die Dinge gegen einander dachte, die man als gezählt durch einzelne Zahlen aufstellte (§. 14.). Jetzt sollen die Fälle näher bestimmt werden, in welchen die Addition das Zuzählen, in welchen sie das Abzählen, und in welchen sie beides fordert.

§. 17.

§. 17.

Die Zahlen, welche zusammen gefasst werden sollen, denkt man sich entweder nur unter einer Bedingung, oder man denkt sie sich unter entgegengesetzten Bedingungen.

Im ersten Falle ist bei allen Zahlen der nämliche Denkact wiederholt, und daher muss die Zahl, welche sie zusammen gefasst darstellt, sagen, wie oft dieser Denkact überhaupt vorgenommen sey. Man erhält also diese Zahl, wenn man die Einheiten der einzelnen Zahlen zu einander zählt, und das Resultat dieses Zusammenzählens sich unter der Bedingung denkt, worunter man sich die einzelnen gegebenen Zahlen dachte.

Im zweiten Falle ist aber nicht bei jeder Zahl der nämliche Denkact wiederholt, in so fern als man sie sich nicht unter einer und der nämlichen Bedingung denkt. Die entgegengesetzten unter sich gleichen Zahlen verschwinden aber als vereinigt gedacht (§. 13.), folglich kann uns auch die Zahl, welche mehrere entgegengesetzte als eine darstellen soll, diese als zusammengefasst nicht alle vor Augen stellen, sondern nur die Ueberreste, welche entstanden, indem die kleinern entgegengesetzten Zahlen so lange einen sich gleichen Theil von den grössern aufhoben, bis bloss Zahlen einerlei Bedingung übrig blieben.

Es geschieht also die Addition dadurch, dass man von den grössern Zahlen so viele Einheiten abzählt, als die kleinern ihnen entgegengesetzten Zahlen Einheiten enthalten, und dieses Verfahren so lange fortsetzt, bis man entweder lauter positive oder lauter negative Zahlen hat, welche man alsdenn zusammen fasst. Oder man kann auch erst alle positive Zahlen zusammen zählen, hierauf eben so mit den negativen Zahlen verfahren, und zuletzt so viele Einheiten von der grössern der beiden erhaltenen Zahlen abzählen, als die kleinere besitzt. Der Rest unter der Bedingung der grössern Zahl gedacht, ist die gesuchte Zahl.

1. Zusatz.

Da das Zählen voraus setzt, dass man sich immer das nämliche x dachte, so können auch nur die Zahlen addirt werden, bei welchen ein und das nämliche x zum Grunde liegt.

§. 18.

1. *Willkührlicher Satz.*

Die Zahlen, welche addirt werden sollen, heissen summirende Zahlen, und die Zahl, welche sie zusammengefasst enthält, heisst Summe.

2. *Willkührlicher Satz.*

Wenn man Zahlen bloss mit ihren Bedingungszeichen neben einander setzt, so zeigt dies schon an, dass sie sollen zusammengefasst gedacht werden. Werden daher die summirenden Zahlen unter bestimmten Bedingungen gedacht, so bedarf man keines Additionszeichens. Aber es kommen Fälle vor, wo eine Regel allgemein sagt, dass man mehrere Zahlen als eine denken soll, ohne dass sie sich darum bekümmert, was die Zahlen für Zeichen haben. In diesen Fällen ist ein Zeichen nöthig, was sagt, dass man sich die gegebenen Zahlen, unter was für Bedingungen sie auch gesetzt seyn mögen, neben einander geschrieben denken soll. Da nun das Zeichen + anzeigt, dass man sich eine Zahl unter der Bedingung denkt, worunter man sie schlechthin setzt, und die summirenden Zahlen, als solche, als schlechthin gesetzt angesehn werden müssen, so zeigt auch + an, wenn man es bei der Addition zwischen mehrere Zahlen setzt, dass man sie sich soll mit den Zeichen neben einander gesetzt denken, mit welchen sie gegeben wurden.

1. *Zusatz.*

Wenn A und B Zahlen einerlei Bedingung, und C und D Zahlen einerlei Bedingung bedeuten, so sind folgende Sätze allgemein wahr:

α) Wenn $A = B$
$C = D$

so ist $A + C = B + D$

β) Wenn $A \gtrless B$
$C = D$

so ist $A + C \gtrless B + D$

γ) Wenn

γ) Wenn $A < B$
$C = D$
so ist $A + C < B + D$

2. Zusatz.

Werden A, B, C und D nur unter einer Bedingung gedacht, so gelten noch folgende Sätze:

α) Wenn $A > B$
$C > D$
so ist $A + C > B + D$

β) Wenn $A < B$
$C < D$
so ist $A + C < B + D$

2. Von der Subtraction überhaupt.

§. 19.

Bei der Subtraction hat man die Absicht, wenn mehrere Zahlen zusammen gefasst sind, eine oder mehrere dieser Zahlen heraus zu heben (§. 15.). Die Subtraction setzt also allemal die Addition voraus, und sagt, dass mehrere Zahlen zusammen gefasst sind, als zusammengefasst gedacht werden sollen, und gibt an, welche Zahl nicht unter den zusammengefassten seyn soll. Die Absicht, die bei der Subtraction zum Grunde liegt, ist also immer die nämliche, aber welche Handlung in den einzelnen Fällen vorgenommen werden muss, muss aus der Handlung hergeleitet werden, die bei der Addition vorgenommen wurde.

§. 20.

1) Wenn a, b, c und d unter einerlei Bedingung gedacht und zu einander addirt werden, so geschieht dies dadurch, dass man die Einheiten der einzelnen Zahlen zu einander zählt. Soll nun d nicht unter den zusammengefassten gedacht werden, so hat man d Einheiten zu viel gezählt, folglich besitzt auch die Summe d Einheiten zu viel.

viel. Man erreicht also hier seinen Zweck, wenn man von der Zahl, die a, b, c und d zusammengefaſst enthält, d Einheiten abzählt. Da nun die Summe von a, b, c und d unter der Bedingung gedacht wird, worunter man die einzelnen Zahlen dachte, so wird auch hier d unter der Bedingung der Summe gesetzt. Denkt man sich daher zwei Zahlen unter einerlei Bedingung, und es soll die kleinere von der gröſsern subtrahirt werden, so geschieht dies dadurch, daſs man von der gröſsern Zahl so viele Einheiten abzählt, als die kleinere besitzt. Der Rest, unter der Bedingung der Summe gedacht, ist die gesuchte Zahl.

2) Werden aber die Zahlen a, $+$ b, $+$ c, $-$ a zusammengefaſst, so hebt die negative a die positive auf; so lange also die $-$ a unter den zusammengefaſsten bleibt, so lange kann auch die Zahl, welche jene Zahlen als eine darstellt, die Einheiten der positiven a nicht enthalten, sondern man denkt sich nur b $+$ c; wird aber die $-$ a heraus gehoben, so denkt man sich a $+$ b $+$ c, folglich muſs auch die Zahl, die sie zusammengefaſst darstellt, a $+$ b $+$ c Einheiten enthalten. Soll also von b $+$ c, $-$ a subtrahirt werden, so erreicht man seinen Zweck, wenn man zu b $+$ c, a Einheiten zählt. Oder wenn von einer positiven Zahl eine negative subtrahirt werden soll, so muſs man so viele Einheiten zu der positiven zählen, als die negative besitzt. Diese Regel gilt, es mag die positive Zahl gröſser oder kleiner als die negative seyn, weil man sich unter b $+$ c eine Zahl denken kann, die gröſser als a, oder kleiner als a ist.

3) Werden aber die Zahlen $-$ a, $-$ b, $-$ c, $+$ a zusammengefaſst, so wird $-$ a durch $+$ a unwürksam, und man sieht in der Zahl, die sie zusammengefaſst enthält, nur $-$ b und $-$ c. Wird aber $+$ a heraus gehoben, so denkt man sich $-$ a, $-$ b, $-$ c zusammengefaſst, folglich ist die erhaltene Zahl, die diese als eine darstellt, um a Einheiten gröſser, als die Summe von $-$ a, $-$ b, $-$ c und $+$ a ist, folglich subtrahirt man von einer nega-

gati-

gativen Zahl eine positive, wenn man zu ihr so viele Einheiten zählt, als die positive besitzt. Diese Regel gilt, es mag die negative Zahl gröſser oder kleiner als die positive seyn, weil —b und —c, als eine Zahl gedacht, gröſser auch kleiner als a gedacht werden kann.

4) Gesetzt aber, es sind +c, +a, +b, —c zusammen gefaſst, so erhält man a+b, hebt man aber aus den zusammengefaſsten a, +b, +c heraus, so denkt man nur noch —c; dies ist also die Zahl, welche in diesem Falle durch die Subtraction gesucht wird. Diese hätte man aber offenbar erhalten, wenn man von a+b+c, a+b Einheiten abgezählt, und den Rest negativ genommen hätte. Soll daher von einer kleinern positiven Zahl eine gröſsre positive subtrahirt werden, so zählt man so viele Einheiten von der gröſsern Zahl, als die kleinere hat, nimmt aber den Rest negativ.

5) Denkt man sich —c, —a, —b, +c zusammengefaſst, so bekömmt man eine Summe, die nur —a und —b enthält. Wird aber gesagt, man soll sich —c, —a und —b nicht unter den zusammengefaſsten denken, es soll also von der negativen Zahl, die a+b Einheiten enthält, die negative Zahl abgezogen werden, welche a+b+c Einheiten besitzt, so erhält man +c.

Diese Zahl hätte man aber offenbar erhalten, wenn man von der negativen Zahl, die a+b+c hat, a+b Einheiten abgezählt und den Rest positiv genommen hätte. Man subtrahirt daher eine gröſsere negative Zahl von einer kleinern negativen, wenn man so viele Einheiten von der gröſsern zählt, als die kleinere besitzt, aber den Rest positiv nimmt.

1. Zusatz.

Die angeführten fünf Fälle sind die einzigen möglichen, und in allen diesen erreicht man seinen Zweck, wenn man das Zeichen der Zahl, die subtrahirt werden soll, in das entgegengesetzte verwandelt, und dann mit ihr und der andern Zahl verfährt, als sollten sie addirt werden.

2. *Zusatz.*

Da die Subtraction, die Addition mehrerer Zahlen voraussetzt, unter welchen die Zahl mit begriffen seyn muss, welche subtrahirt werden soll, so ist einleuchtend, dass sich auch bei der Subtraction die gegebenen Zahlen auf ein und das nämliche x beziehen müssen.

3. *Zusatz.*

Sollen von einer Zahl A mehrere andere subtrahirt werden, so kann man dieser ihre Summe suchen, und diese Summe von A subtrahiren.

§. 21.

1. *Willkührlicher Satz.*

Die Zahl, welche subtrahirt werden soll, hat den Namen Subtrahirende Zahl, und die andere heisst Zuverringernde Zahl. Die Zahl, welche durch die Subtraction erhalten wird, ist die Differenz.

2. *Willkührlicher Satz.*

Da nach §. 20. 1. Zus. die Subtraction verrichtet wird, wenn man das Zeichen der subtrahirenden Zahl in das entgegengesetzte verwandelt, und sie hierauf zu der zuverrringernden addirt, so ist einleuchtend, dass man gar keines Subtractionszeichens bedarf, wenn die subtrahirende Zahl unter einer bestimmten Bedingung gegeben ist, sondern es ist schon hinreichend, wenn man mit dem Zeichen der subtrahirenden Zahl die vorgeschriebene Veränderuug vornimmt, und sie dann schlechthin neben die zuverringernde setzt (§. 18. 2. Willk. S.). Aber in dem Falle, wenn die subtrahirende Zahl unter keiner bestimmten Bedingung gegeben ist, so ist ein Zeichen nöthig, was sagt, dass man sich die subtrahirende Zahl mit dem entgegengesetzten Zeichen neben die zuverringernde gesetzt denken soll. Da nun das Zeichen — anzeigt, dass eine Zahl nicht unter der Bedingung gedacht werde, worunter man sie sich als schlechthin gesetzt denkt, und die subtrahirende Zahl, als solche, als schlechthin gesetzt angesehn werden muss, so schreibt man in jenem Falle dieses Zeichen vor die subtrahirende, so dass es zwischen der zuverringernden und subtrahirenden steht.

1. Zusatz.

Wenn A und B Zahlen einerlei Bedingung bedeuten, und man sich auch C und D unter einerlei Bedingung denkt, so sind folgende Sätze allgemein wahr:

α) Wenn $A = B$
$C = D$
so ist $A - C = B - D$

β) Wenn $A > B$
$C = D$
so ist $A - C > B - D$

γ) Wenn $A < B$
$C = D$
so ist $A - C < B - D$

2. Zusatz.

Denkt man sich A, B, C und D unter einerlei Bedingung und ist $A > C$ und $B > D$, so sind noch folgende Sätze allgemein wahr:

α) Wenn $A = B$
$C > D$
so ist $A - C < B - D$

β) Wenn $A < B$
$C > D$
so ist $A - C < B - D$

---

3. Von der Multiplication überhaupt.

§. 22.

Bei der Multiplication der A nach dem Gesetze von B, setzen wir die Einheit von B schlechthin, und untersuchen nun, was für Denkacte vorgehn, wenn wir B aus der gesetzten Einheit herleiten. Hierauf denken wir uns A, wie sie gegeben ist, in so fern als sie gegeben wurde, als schlechthin gesetzt, und

sehn einen jeden jener Denkacte, welche die Entstehung der B und der schlechthin gesetzten Einheit erforderte, als Regel an, die uns sagt, was wir mit A vornehmen sollen, und wenden diese Regeln in der Ordnung an, in welcher jene Denkacte vorgingen.

§. 23.

1. Willkührlicher Satz.

Wenn A nach dem Gesetze von B multiplicirt werden soll, so bedient man sich, um dies anzuzeigen, vier Bezeichnungsarten:

1) Man schreibt A und B ohne Zeichen neben einander, was jedoch nur dann geschehen darf, wenn dadurch keine Zweideutigkeit entstehen kann.

2) Man setzt zwischen A und B einen Punkt, als A . B.

3) Man setzt zwischen A und B ein Komma, als A, B.

4) Man schreibt zwischen A und B ein liegendes Kreuz, als A × B.

Bei allen diesen Bezeichnungsarten muss A auf der linken, und B auf der rechten Seite stehn.

Anmerkung.

Ich will mich inskünftige bei Buchstaben des ersten Zeichens bedienen, wenn man sich vorstellen soll, dass die Multiplication schon geschehn sey.

2. Willkührlicher Satz.

Wenn A nach dem Gesetze von B multiplicirt wird, so heisst A das Multiplicand, B der Multiplicator, und die Zahl, welche durch die Multiplication entsteht, wird Product genannt.

1. Zusatz.

Zur Multiplication wird nothwendig ein Multiplicand und ein Multiplicator erfordert. Fehlt eine oder fehlen beide dieser Zahlen, so kann kein Product entstehn, sondern es ist Null.

2. Zusatz.

Da das Multiplicand das in Rücksicht auf das Produkt ist, was 1 in Hinsicht auf den Multiplicator ist, so liegt bei dem Produkte immer das x zum Grunde, was bei dem Multiplicande zum Grunde liegt. Es wird daher auf das x des Multiplicators gar nicht reflectirt, sondern der Multiplicator ist eine unbenannte Zahl.

3. Zusatz.

Ist der Multiplicator gleich 1 und das Multiplicand gleich B, so ist auch das Product gleich B. Denn zum Multiplicator ist nur die Einheit gesetzt, also muss auch eben dies nur in Hinsicht auf das Product gesetzt werden, und dies ist schon das gegebene Multiplicand B.

4. Zusatz.

Wenn $Mm = P$, so ist M das in Hinsicht auf P, was m in Hinsicht auf 1 ist. Sind also M und m unbenannte Zahlen, so unterscheiden sich P und m nur in so weit, als sich M und 1 von einander unterscheiden, oder es ist auch m das in Hinsicht auf P, was 1 in Hinsicht auf M ist. Folglich ist es einerlei, ob man hier M nach dem Gesetze von m, oder m nach dem Gesetze von M multiplicirt.

5. Zusatz.

Sollte in $Mm = P$, M eine benannte Zahl seyn, so ist auch Mm mit mM einerlei, wenn man bei der Multiplication, der Zahl m die Benennung von M gibt, und M als unbenannte Zahl ansieht.

Wenn daher eine Zahl nach dem Gesetze einer andern multiplicirt werden soll, so ist es einerlei, welche Zahl man zum Multiplicand und welche man zum Multiplicator wählt. Daher führen auch das Multiplicand und der Multiplicator den gemeinschaftlichen Namen Factor.

6. Zusatz.

Wenn A nach dem Gesetze von B multiplicirt ist, so kann man AB wieder nach dem Gesetze von C multipliciren, alsdenn entsteht ABC. ABC kann wieder nach dem Gesetze

 von

von D multiplicirt werden, und dann entſteht ABCD u. ſ. w.; B, C, D ſind hier unbenannte Zahlen, A kann aber ſowohl eine benannte als unbenannte ſeyn. Im erſtern Falle hat das ganze Product mit A einerlei Benennung.

7. *Zuſatz.*

Da AB = BA, ſo iſt auch AB . C = BA . C, und da AB und BA, jede als eine Zahl angeſehn werden kann, ſo iſt auch AB . C = BA . C = C . AB = C . BA. AB entſtand aber, indem man A nach dem Geſetze der B multiplicirte, und BA entſtand, indem man B nach dem Geſetze der A multiplicirte. Daher iſt auch C . A . B = C . B . A, folglich iſt auch AB . C = BA . C = C . AB = C . BA = CA . B = CB . A. Es kömmt alſo bei drei Zahlen gar nicht darauf an, in welcher Ordnung die Multiplication mit den einzelnen Factoren vorgenommen wird, das Product iſt immer das nämliche; man ſieht aber auch leicht ein, daſs ſich der für drei Zahlen geführte Beweis auf jede beliebige Anzahl von Zahlen ausdehnen läſst. Daher iſt jener Satz nicht bloſs für zwei und drei Zahlen wahr, ſondern er gilt für eine jede gröſsere Anzahl von Zahlen, folglich iſt auch der Satz für jede Anzahl von Zahlen richtig. Man ſagt daher auch, wenn eine Zahl nach dem Geſetze mehrerer andrer multiplicirt werden ſoll, daſs man ſie ſoll wechſelſeitig unter einander multipliciren.

8. *Zuſatz.*

Das Product, was durch A . B . C . D entſteht, iſt gleichgültig mit dem Producte, was man durch AB . CD, durch ABC . D u. ſ. f. erhält. Soll man daher mehrere Zahlen wechſelſeitig unter einander multipliciren, ſo kann man auch aus den einzelnen gegebenen Zahlen Producte machen, und dieſe in einander multipliciren, und umgekehrt, wenn mehrere Producte unter einander multiplicirt werden ſollen, ſo kann man auch die Factoren dieſer Producte einzeln unter einander multipliciren.

Feſt-

Festsetzung der Regeln, unter welcher Bedingung die Producte gedacht werden müssen.

§. 24.

Da das Multiplicand und der Multiplicator sowohl positiv, als negativ seyn können, so fragt es sich, was das Product in den verschiedenen Fällen, die hieraus entstehn, für ein Zeichen haben müsse? Die Antwort dieser Frage muss aus der Erklärung der Multiplication hergeleitet werden, und hieraus folgt folgendes:

Ein jeder Denkact, der vorgeht, wenn man sich den Multiplicator denkt, ist Vorschrift, wie man das Product aus dem Multiplicande entstehn lassen soll. Das positive Zeichen sagt aber, dass man sich etwas schlechthin gesetzt denkt, und das negative, dass man sich das entgegengesetzte von diesem denken muss, folglich da das Multiplicand, als solches, wie es gegeben ist, als schlechthin gesetzt angesehn werden muss, so sagt auch das positive Zeichen des Multiplicators, dass man sich das Multiplicand denken soll, wie es gesetzt ist, und das negative Zeichen des Multiplicators sagt, dass man sich das Multiplicand nicht unter der Bedingung denken muss, worunter es gesetzt ist.

Hiernach erhält man folgende Fälle:

1) $+A \times +B = +AB.$
2) $-A \times +B = -AB.$
3) $+A \times -B = -AB.$
4) $-A \times -B = +AB.$

1. *Zusatz.*

Wenn der Multiplicator positiv ist, so hat das Product das Zeichen des Multiplicands. Ist aber der Multiplicator negativ, so hat das Product das entgegengesetzte Zeichen des Multiplicands. Oder wenn das Multiplicand und der Multiplicator einerlei Zeichen haben, so ist das Product positiv, haben sie verschiedene Zeichen, so ist das Product negativ.

2. Zusatz.

Sind mehrere negative Zahlen gegeben, die wechselseitig unter einander multiplicirt werden sollen, so lassen sie sich entweder paarweise darstellen, oder dies ist nicht der Fall.

Im ersten Falle kann man das ganze Product aller Factoren erhalten, wenn man zuerst aus den einzelnen Paaren der Factoren Producte macht, und nachher das Product aller dieser Producte sucht. Ein jedes Paar gibt aber ein positives Product, folglich ist auch das Product aller dieser Producte positiv.

Im zweiten Falle lassen sich die Factoren paarweise darstellen, wenn man einen weglässt. Diese geben ein positives Product; um aber das ganze Product zu erhalten, muss das erhaltene positive Product noch nach dem Gesetze des einen weggelassenen negativen Factors multiplicirt werden, folglich ist das Product aller Factoren negativ.

Da nun eine Zahl, deren Einheiten paarweise dargestellt werden können, eine grade, und die, deren Einheiten nicht paarweise dargestellt werden können, eine ungrade Zahl ist, so kann man sagen: Wenn eine grade Anzahl von Factoren gegeben ist, so ist ihr Product positiv, ist aber eine ungrade Anzahl gegeben, so ist ihr Product negativ.

3. Zusatz.

Wenn mehrere positive und negative Factoren gegeben sind, deren Product gesucht wird, so kann man zuerst das Product der positiven und das Product der negativen Factoren suchen, und hierauf das eine Product nach dem Gesetze des andern multipliciren. Hieraus folgt, dass auch in dem Falle, wenn mehrere positive und negative Factoren gegeben sind, das Product positiv ist, wenn die Anzahl der negativen Factoren grade ist, und dass das Product negativ ist, wenn die Anzahl der negativen Factoren ungrade ist.

§. 25.

Lehrsatz.

Wenn $R = A + B - C$, so ist

$$GR = G(A + B - C) = GA + GB - GC.$$

Be-

Beweis.

Da das Multiplicand völlig das in Rücksicht auf das Product ist, was 1 in Hinsicht auf den Multiplicator ist, so kann man eben so aus dem Multiplicande das Product herleiten, wie man aus 1 den Multiplicator entstehn lässt. Bei dem gegebenen Multiplicator setzt man zuerst 1, und lässt hieraus A entstehn; nun setzt man wieder 1, und leitet hieraus B her, hierauf setzt man wieder die Einheit, lässt aus dieser C entstehn, und denkt sie sich negativ. Ist dieses geschehn, so fasst man alle drei Zahlen zusammen.

Man erhält also auch das Product, wenn man G setzt, und hieraus eine Zahl herleitet, welche die Form in Rücksicht auf G hat, die der Zahl A in Rücksicht auf 1 zukömmt. Diese ist GA. Nun setzt man wieder G, und lässt hieraus eine andere entstehn, wie B aus 1 entstand. Diese ist GB. Hierauf setzt man wieder G, und leitet aus ihr eine Zahl ab, wie — C aus 1 hergeleitet wurde. Diese ist — GC. Diese drei Zahlen zusammengefasst gedacht, stellt der Ausdruck GA + GB — GC dar, folglich zeigt dieser auch das gesuchte Product an.

Zusatz.

Wenn also eine Zahl, die mehrere zusammengefasst enthält, nach dem Gesetze einer andern G multiplicirt werden soll, so ist es einerlei, ob man sogleich die ganze Zahl nach dem Gesetze von G multiplicirt, oder ob man die einzelnen Zahlen, deren Summe sie ist, einzeln nach G multiplicirt, und hierauf alle diese Producte zusammenfasst.

---

2. Von der Division überhaupt.

§. 25.

Bei der Division der A nach dem Gesetze der B, nehmen wir an, dass wir so von einer Zahl x zu A gekommen sind, wie man von 1 zu B kömmt, und unser Zweck ist, auf dem entgegengesetzten Wege wieder zu x zu kommen. Diesen entgegengesetzten Weg gibt der Schritt von B zu 1 an, wir müs-

ſen folglich eine Zahl aufſuchen, die das in Rückſicht auf A iſt, was 1 in Rückſicht auf B iſt, oder die geſuchte Zahl muſs, mit A verglichen, die Form haben, welche 1 in Hinſicht auf B hat. Die Form, welche aber 1 mit B verglichen hat, beſtimmen wir dadurch, daſs wir unterſuchen, was für Denkacte vorgingen, als wir aus der ſchlechthin geſetzten Einheit B herleiteten, und nun in umgekehrter Ordnung die entgegengeſetzten Denkacte von jenen aufſuchen. Sind dieſe beſtimmt, ſo ſehn wir ſie als Vorſchrift an, nach welcher wir aus A die Zahl x entſtehn laſſen ſollen, und zwar wir wenden die Denkacte in der Ordnung an, in der wir ſie aufgeſucht haben.

§. 27.

1. *Willkührlicher Satz.*

Wenn A nach dem Geſetze der B dividirt werden ſoll, ſo bedient man ſich, um dies anzuzeigen, zweier Bezeichnungsarten:

1) Man ſchreibt A und B neben einander, und ſetzt zwiſchen ſie ein Kolon, ſo daſs A auf der linken und B auf der rechten Seite des Zeichens ſteht. Z. B. A : B.

2) Man ſchreibt B unter A, und trennt beide durch einen Strich. Z. B. $\frac{A}{B}$.

Bei der Diviſion werde ich mich beſtändig des erſten Zeichens bedienen, und daher durch das letzte Zeichen nur eine gebrochne Zahl andeuten.

2. *Willkührlicher Satz.*

Wenn A nach dem Geſetze der B dividirt wird, ſo heiſst A das Dividend, B der Diviſor, und die Zahl, welche durch die Diviſion entſteht, wird Quotient genannt.

1. *Zuſatz.*

Es iſt alſo nach §. 26. das Dividend nichts anders, als ein Product, der Diviſor iſt ein dazugehöriger Multiplicator, und der Quotient iſt das dazugehörige Multiplicand. Verſteht man

alſo

alſo unter D das Dividend, unter d den Diviſor, und unter Q den Quotienten, ſo iſt D : d = Q und D = dQ. Da nun das Multiplicand und der Multiplicator verwechſelt werden können, ſo muſs auch D : Q = d und D = Qd ſeyn. Oder, das Dividend iſt gleich dem Producte des Diviſors nach dem Geſetze des Quotienten, auch gleich dem Producte des Quotienten nach dem Geſetze des Diviſors, und wenn man das Dividend nach dem Geſetze des Quotienten dividirt, ſo erhält man den Diviſor.

2. *Zuſatz.*

Der Diviſor kann nur eine unbenannte Zahl, hingegen das Dividend kann ſowohl eine benannte, als unbenannte Zahl ſeyn. Im erſten Falle iſt auch der Quotient eine benannte, und im letzten Falle iſt er eine unbenannte Zahl.

3. *Zuſatz.*

Zur Diviſion wird nothwendig ein Dividend und ein Diviſor erfordert. Fehlt eine oder fehlen beide dieſer Zahlen, ſo iſt der Quotient gleich Null. Folglich iſt A : 0 = 0, 0 : B = 0 und 0 : 0 = 0.

4. *Zuſatz.*

Iſt der Diviſor gleich 1, ſo iſt der Quotient gleich dem Dividend. Denn der Schritt, der von dem Diviſor zur Einheit führt, führt von dem Dividende aus zum Quotienten. Iſt aber der Diviſor gleich 1, ſo darf man keinen Schritt thun, ſondern man befindet ſich ſchon in der Einheit, folglich darf man auch von dem Dividende aus keinen Schritt thun, um zum Quotienten zu kommen, ſondern das Dividend iſt auch der Quotient.

5. *Zuſatz.*

Iſt das Dividend gleich dem Diviſor, ſo iſt der Quotient gleich 1. Denn hier geht man von dem nämlichen Punkte aus, um zum Quotienten zu kommen, von welchem man von dem Diviſor ausgeht, um zur Einheit zu kommen, und thut in dem erſten Falle den nämlichen Schritt, den man in dem zweiten Falle thut.

6. Zu-

6. Zusatz.

Bei der Multiplication kann man das Multiplicand und den Multiplicator verwechseln, aber bei der Division dürfen Dividend und Divisor, wenn sie ungleich sind, nicht verwechselt werden. Denn dürfte dies geschehn, so müsste der Quotient bei der Verwechselung der nämliche bleiben, und es müsste nach geschehener Verwechselung, das Dividend nach dem Gesetze des Quotienten multiplicirt, den Divisor geben, oder es wäre DQ = d. Da aber D für ein Product, Q für ein dazugehöriges Multiplicand, und d für ein dazugehöriger Multiplicator angesehn werden kann, so hiesse dies, man erhielte den Multiplicator, wenn man das Product nach dem Gesetze des Multiplicands multiplicirte, welches doch unter der Bedingung, dass D und d verschieden sind, also Q nicht gleich 1 ist, absurd ist.

7. Zusatz.

Da man A nach dem Gesetze der Zahlen B, C, D, E u. s. f. multipliciren kann, so muss sich auch das Product P nach und nach, nach dem Gesetze der Zahlen B, C, D, E u. s. f., dividiren lassen, weil dies nichts anders heisst, als dass man auf einem Wege von dem Producte zum Multiplicand kommen kann, welcher der entgegengesetzte von dem ist, auf welchem man von dem Multiplicande zum Producte kam.

8. Zusatz.

Da es bei der Multiplication nicht darauf ankömmt, in welcher Ordnung mehrere gegebene Zahlen wechselseitig unter sich multiplicirt werden, so kömmt es auch nicht darauf an, in welcher Ordnung die Division vorgenommen wird, wenn eine gegebene Zahl, nach dem Gesetze mehrerer anderer, dividirt werden soll; und da die Multiplication auch nach den Gesetzen der Producte der einzelnen Factoren geschehen kann, so kann auch die Division nach den Gesetzen der Producte der einzelnen Divisoren geschehn.

9. Zusatz.

Wenn eine gegebene ganze Zahl A ein Product der F nach dem Gesetze einer andern B oder nach den Gesetzen mehrerer ande-

anderer G, D, E ist, d. h. wenn A den Factor B, oder die Factoren C, D, E in sich begreift, so kömmt man bei der Division der A nach dem Gesetze von B, oder nach den Gesetzen der Zahlen C, D, E wieder zu der ganzen Zahl F. Dies drückt man auch so aus: es ist A für B, oder für C, D, E divisibel oder theilbar. Ist aber A kein Product einer ganzen Zahl F nach dem Gesetze der B, oder nach den Gesetzen der Zahlen C, D, E, so kann man auch bei der Division der ganzen Zahl A nach dem Gesetze von B, oder nach den Gesetzen der C, D, E nicht zu einer ganzen Zahl kommen, d. h. es ist A nicht für B oder C, D, E theilbar.

10. Zusatz.

Wenn $A : B = Q$, $Q : C = q$, $q : D = p$, so ist $A = BQ$, $Q = Cq$ und $q = Dp$ (§. 27. 1ter Zus.), folglich ist $A = BCDp$ und daher auch für die Producte der Zahlen B, C, D theilbar.

Anmerkung.

Diesen Satz will ich inskünftige kurz so ausdrücken: eine Zahl, welche für gewisse andere divisibel ist, ist auch für die Producte dieser Zahlen theilbar.

11. Zusatz.

Läſst sich A nach dem Gesetze von BCDE so dividiren, daſs der Quotient eine ganze Zahl ist, so ist auch A für B, C, D, E theilbar. Denn ist A für BCDE divisibel, so ist auch A ein Product einer Zahl x nach dem Gesetze der Zahl BCDE. Es ist aber einerlei, ob man x nach dem Gesetze des Products BCDE multiplicirt, oder ob dieses nach und nach, nach den Gesetzen von B, C, D, E geschieht, folglich muſs auch A nach und nach, nach den Gesetzen von B, C, D, E divisibel seyn.

12. Zusatz.

Wenn sich A nicht nach B, C, D dividiren läſst, so ist A auch nicht für die Producte dieser Zahlen divisibel, und umgekehrt, wenn A nicht für ein gewisses Product theilbar ist, so ist auch A nicht für alle Factoren dieses Products divisibel.

Festsetzung der Regeln, unter welcher Bedingung die Quotienten gedacht werden müssen.

§. 28.

Das Dividend und der Divisor können sowohl positiv, als negativ seyn, es entsteht also bei der Division die Frage, was der Quotient in den verschiedenen Fällen für ein Zeichen haben müsse? Die Antwort dieser Frage muss nothwendig aus der Erklärung der Division fliessen, und da hiernach das Dividend nichts anders als ein Product, und der Divisor ein Multiplicator ist, wozu das Multiplicand, nämlich der Quotient gesucht wird, so kömmt es nur darauf an, zu untersuchen, was für ein Zeichen das Multiplicand haben müsse, wenn das Zeichen des Products und des Multiplicators bestimmt sind. Stellt man diese Untersuchung an, so ergeben sich nach §. 24. folgende Sätze:

1) Wenn Product und Multiplicator positiv sind, so ist auch das Multiplicand positiv.

2) Ist das Product positiv und der Multiplicator negativ, so ist auch das Multiplicand negativ.

3) Ist das Product negativ und der Multiplicator positiv, so ist das Multiplicand negativ.

4) Sind Product und Multiplicator negativ, so ist das Multiplicand positiv.

Folglich hat man bei der Division folgende Fälle:

1) $+D : +d = +Q$
2) $+D : -d = -Q$
3) $-D : +d = -Q$
4) $-D : -d = +Q$

1. Zusatz.

Wenn der Divisor positiv ist, so hat der Quotient das Zeichen des Dividends. Ist aber der Divisor negativ, so hat der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Dividends. Oder wenn das Dividend und der Divisor einerlei Zeichen haben, so ist der Quotient positiv; haben sie verschiedene Zeichen, so ist der Quotient negativ.

2. Zusatz.

Soll eine Zahl nach den Gesetzen mehrerer negativen Zahlen dividirt werden, so kann die Division nach dem Gesetze des Producks dieser negativen Divisoren geschehn. Dieses Product ist aber positiv oder negativ, nachdem ihre Anzahl grade oder ungrade ist, folglich hat auch der Quotient das Zeichen des Dividends, wenn eine grade Anzahl negativer Divisoren gegeben ist, und der Quotient hat das entgegengesetzte Zeichen des Dividends, wenn ihre Anzahl ungrade ist.

3. Zusatz.

Wird eine Zahl nach den Gesetzen mehrerer positiver und negativer Divisoren dividirt, so hat ebenfalls der Quotient das Zeichen des Dividends, wenn sich unter den Divisoren eine grade Anzahl negativer befindet, und der Quotient hat das entgegengesetzte Zeichen des Dividends, wenn die Anzahl der negativen Divisoren ungrade ist. Denn in dem ersten Falle ist das Product aller gegebenen Divisoren positiv, und im zweiten Falle ist ihr Product negativ. (3. Zus. §. 24.)

§. 29.

Lehrsatz.

Wenn $R = A + B - C$, so ist

$$R : G = (A + B - C) : G = A : G + B : G - C : G.$$

Beweis.

Es ist $R . G = (A + B - C) . G = AG + BG - CG$ (§. 25.) folglich ist auch nach §. 26.

$$R : G = (A + B - C) : G = A : G + B : G - C : G.$$

Zusatz.

Wenn also eine Zahl, die mehrere zusammengefasst enthält, nach dem Gesetze einer andern G dividirt werden soll, so ist es einerlei, ob man sogleich die ganze Zahl nach dem Gesetze von G dividirt, oder ob man die einzelnen Zahlen, deren Summe sie ist, einzeln nach dem Gesetze von G dividirt, und hierauf alle diese Quotienten zusammenfasst.

Drit-

Drittes Kapitel.

Anwendung der allgemeinen Regeln für die vier Rechnungsarten auf den Calculus decadicus.

1. Addition.

§. 30.

Aufgabe.

Mehrere ganze unbenannte Zahlen zu einander zu addiren.

Auflösung.

1) Man setzt die Zahlen so unter einander, daſs Ziffern einerlei Ordnung unter einander kommen.

2) Man zählt die Ziffern zusammen, die in einer Reihe unter einander stehn, und fängt dieses Zusammenzählen bei den Ziffern der geringsten Ordnung an. Ist die Summe einer solchen Reihe von Ziffern einerlei Ordnung, kleiner als 10, so wird die Ziffer, welche die Summe anzeigt, unter die zusammengezählte Reihe gesetzt. Enthält die Summe aber zehn oder mehrere Einheiten, so muſs man darauf achten, wie viele Einheiten sie von einer höhern Ordnung enthält, und alsdenn diese Einheiten zu den Ziffern der ihnen zukommenden Ordnung fügen, und unter die zusammengezählten Ziffern bloſs eine Ziffer setzen, welche den Rest anzeigt, der nach dem Abzuge jener höhern Einheiten von der ganzen Summe übrig blieb.

Beweis.

Das in der Auflösung vorgeschriebene Verfahren stützt sich bloſs auf folgende Sätze:

1) Zah-

1) Zahlen einerlei Bedingung werden zu einander addirt, wenn man ihre Einheiten zusammenzählt. (§. 17.)

2) Zehn Einheiten einer Ordnung, machen eine Einheit der nächsthöhern. Hundert Einheiten einer Ordnung machen eine Einheit der Ziffer aus, die der Ziffer der nächsthöhern Ordnung vorhergeht u. s. w. (§. 3.)

Da nun diese beiden Sätze richtig sind, so muss auch das vorgeschriebene Verfahren richtig seyn.

Beispiel.

Es sollen 245689, 73954 und 6721 zu einander addirt werden.

	245689
Stellung	73954
	6721
	xxxxx
Summe	326364

Die Einheiten, welche zu den Ziffern höherer Ordnungen gefügt werden müssten, sind hier mit einem Queerstriche bezeichnet.

§. 31.

Aufgabe.

Mehrere benannte Zahlen zu einander zu addiren.

Auflösung.

Man schreibt erst eine Reihe von den gegebenen Zahlen hin, in welcher sich Einheiten jeder Art befinden, die unter den zu einander addirenden vorkommen, und gibt ihnen die Ordnung in dieser Reihe, dass die Zahlen mit Benennungen von geringerm Werthe, den Zahlen mit Benennungen von grösserm Werthe von der Linken nach der Rechten folgen, und setzt alsdenn die noch übrigen Zahlen, welche nicht in dieser Reihe begriffen sind, so unter diese Reihe, dass Zahlen einerlei Benennung unter einander stehn und sich ihre Ziffern nach §. 30. über einander befinden.

Hierauf addirt man die über einander stehenden Zahlen von der Rechten nach der Linken, und wenn eine Summe von Zahlen mit Benennungen von geringerm Werthe so viele Einheiten enthält, dass sie eine oder mehrere Einheiten der Zahlen mit Benennungen von grössern Werthe ausmachen, so werden diese von der erhaltenen Summe genommen und als Einheiten zu den Zahlen gefügt, zu welchen sie gehören, und nur der Rest wird unter die addirten Zahlen geschrieben.

Beweis.

Dieser kann auf eine ähnliche Weise, wie der in §. 30., geführt werden.

1. Beispiel.

4 Louisd'.	+ 3 rthlr.	+ 22 ggr.	+ 6 pf.
2 - -	+ 2 -	+ 9 -	+ 2 -
12 - -	+ 3 -	+ 12 -	+ 9 -
19 Louisd'.	+ 4 rthlr.	+ 20 ggr.	+ 5 pf.

2. Beispiel.

20 Pfund	+ 16 Loth	+ 3 Quent.
30 Pfund	+ 18 Loth	+ 2 Quent.
51 Pfund	+ 3 Loth	+ 1 Quent.

Zusatz.

Sollten die gegebenen Zahlen allgemeine Benennungen haben, d. i. mit Buchstaben benannt seyn, so fällt die Anwendung des in der Auflösung vorgeschriebenen Verfahrens in so weit weg, dass keine Einheiten von den Zahlen einer gewissen Benennung zu den Zahlen einer andern Benennung fliessen können, und dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung die Zahlen neben einander geschrieben sind, welche die erste Reihe ausmachen. Gewöhnlich ist es aber doch, die Zahlen in dieser Reihe so zu ordnen, dass die Benennungen von der Linken nach der Rechten auf einander folgen, wie sie im Alphabete geordnet sind.

1. Bei-

1. *Beispiel.*

5a	+ 3b	+ 2c	+ 3d	+ 5e	+ 7f
3a	+ 6b	+ c	+ 4d	+ 2e	+ 11f
2a	+ 3b	+ 4c	+ 11d	+ 9e	+ 8f
10a	+ 12b	+ 7c	+ 18d	+ 16e	+ 26f

2. *Beispiel.*

5a	+ 7b	+ 12c	+ 8d	+ 9e	+ 3f
6a	+ 3b	+ 4c	+ 6d	+ e	
5a		+ 8c	+ 4d		
16a	+ 10b	+ 24c	+ 18d	+ 10e	+ 3f

§. 32.

Aufgabe.

Mehrere benannte Zahlen zu einander zu addiren, die nicht alle unter einerlei Bedingung gedacht werden.

Auflösung.

Haben sie keine allgemeine Benennungen, so kann man erst die Summe der positiven und die Summe der negativen suchen, und hierauf die kleinere von der grössern trennen, der Rest unter der Bedingung der grössern Zahl gedacht, ist die verlangte Summe aller gegebenen Zahlen. Die Richtigkeit dieser Vorschrift erhellet aus §. 20.; da aber bei der Subtraction einer kleinern Zahl von einer grössern, die beide unter einerlei Bedingung gedacht werden, die kleinere ebenfalls von der grössern getrennt wird, so brauche ich hier nicht das Verfahren zu bestimmen, was bei der Trennung beobachtet werden muss, sondern kann mich auf die Vorschriften berufen, welche die Subtraction dazu gibt. Haben aber die gegebenen Zahlen allgemeine Benennungen, so ordne man sie, wie sie geordnet werden, wenn sie unter einerlei Bedingung gedacht zu einander addirt werden sollen (§. 31. Zus.); suche hierauf die einzelnen Summen der Zahlen, die über einander stehn, und setze diese unter die Zahlen, deren Summen sie sind. Werden die über einander gesetzten Zahlen unter einerlei Bedingung gedacht, so

addirt man sie nach §. 31. Zus.; denkt man sie aber unter entgegengesetzten Bedingungen, so muss wieder eine Trennung vorgenommen werden. Das Verfahren, was hierbei beobachtet werden muss, soll ebenfalls die Subtraction lehren.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 3a + 4b + 5c - 6d + 3e \\ 5a + 2b - 2c - 3d - 5e \\ \hline 8a + 2b + 3c - 9d - 2e \end{array}$$

---

2. Subtraction.

§. 33.

1. Aufgabe.

Eine kleinre unbenannte Zahl von einer grössern zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setzt die subtrahirende Zahl so unter die zuverringernde, dass Ziffern einerlei Ordnung unter einander stehn. Nun fängt man bei den Einern an, von den Ziffern einer jeden Ordnung der zuverringernden Zahl, so viele Einheiten abzuzählen, als die darunter stehenden Ziffern der subtrahirenden Zahl Einheiten enthalten, und setzt den Rest unter die Ziffern, durch welche sie entstanden ist. Steht in der zuverringernden Zahl allemal eine grössere Ziffer über einer kleinern der subtrahirenden Zahl, so kann dies ohne Schwierigkeit geschehn; steht aber eine kleinere Ziffer über einer grössern, so muss in der zuverringernden Zahl von einer Ziffer, welche der kleinern zunächst vorhergeht, eine Einheit genommen und zu der kleinern gesetzt werden, wodurch also diese um 10 Einheiten vermehrt und jene um eine Einheit vermindert wird, welches letztere durch einen Punkt angezeigt werden kann. Ist in der Stelle der Ziffer, wovon man eine Einheit nehmen will, eine Null, so muss man zu der Ziffer seine Zuflucht nehmen, die dieser Null zunächst vorhergeht, ihr also eine Einheit nehmen, und

diese

diese in die Stelle der Null setzen. Hier hat sie aber den Werth von 10 Einheiten, daher kann man von diesen wieder eine Einheit zu der zu kleinen Ziffer setzen, so bleibt in der Stelle der Null die Ziffer 9, und die zu kleine Ziffer ist um 10 Einheiten gewachsen. Gehen der zu kleinen Ziffer noch mehrere Nullen vorher, so gibt man der ersten Ziffer, die den Nullen vorhergeht, einen um die Einheit kleinern Werth, setzt in jede Stelle, welche die Nullen einnehmen, die Ziffer 9, und vergrössert den Werth der zu kleinen Ziffer um 10 Einheiten.

Beweis.

Das Verfahren, was in der Auflösung vorgeschrieben ist, gründet sich bloss auf folgende beide Sätze:

1) Wenn von einer grössern Zahl eine kleinere der nämlichen Bedingung subtrahirt werden soll, so müssen so viele Einheiten von der grössern Zahl abgezählt werden, als die kleinere besitzt.

2) Eine Einheit von der n^{ten} Ordnung macht zehn Einheiten einer Ziffer von der $n \mp 1^{ten}$ Ordnung.

Da nun die Richtigkeit dieser Sätze gewiss ist, so ist auch das in der Auflösung vorgeschriebene Verfahren richtig.

1. *Beispiel.*

Es soll von 238546 die Zahl 5723 subtrahirt werden.

Stellung	238.546
	5723
Differenz	232823

2. *Beispiel.*

Es sey 2038500006 die zuverringernde Zahl, und 57823 die subtrahirende.

2038.50006
57823
2037921183

2. *Aufgabe.*

Von mehrern benannten Zahlen einerlei Art andere ihnen gleichartige zu ſubtrahiren, deren Summe aber kleiner iſt, als die Summe der zuverrringernden Zahlen.

Auflöſung.

Sind unter den zuverringernden Zahlen mehrere von einerlei Benennung, ſo macht man aus dieſen eine einzige, und eben ſo verfährt man mit den ſubtrahirenden. Hierauf werden die zu verringernden Zahlen ſo geordnet, daſs die Zahlen mit Benennungen von geringerm Werthe auf die Zahlen mit Benennungen von gröſsern Werthe von der Linken nach der Rechten folgen, und nun werden die ſubtrahirenden ſo darunter geſetzt, daſs Zahlen einerlei Benennung und Ziffern einerlei Ordnung unter einander ſtehn. Iſt dies geſchehn, ſo zählt man ſo viele Einheiten von jeder Zahl der zuverringernden ab, als die darunter ſtehende ſubtrahirende Einheiten enthält, und fängt dieſe Operation bei der Zahl mit der Benennung vom geringſten Werthe an. Sollte eine kleinere zuverringernde Zahl über einer gröſsern ſubtrahirenden ſtehn, ſo nimmt man von der Zahl, welche der kleinern zunächſt vorhergeht, eine Einheit, und gibt ſie dieſer zu kleinen Zahl, wodurch jene um eine Einheit vermindert, dieſe aber um ſo viele ihrer Einheiten vermehrt wird, als von dieſer auf jene eine Einheit gehn.

Beweis.

Dieſer kann auf ähnliche Weiſe ſo geführt werden, wie der Beweis in §. 33. geführt iſt.

1. *Beiſpiel.*

8. Louisd'.	+	3. rthlr.	+	5. ggl.	+	6 pf.
2 - -	+	4 -	+	8 -	+	11 -
5 Louisd'.	+	3 rthlr.	+	20 ggl.	+	7 pf.

2. *Beiſpiel.*

6 Pfund	+	23 Loth	+	2 Quent.
3 -	+	18 -	+	3 -
3 Pfund	+	4 Loth	+	3 Quent.

Zu-

Zusatz.

Sollten die Zahlen allgemeine Benennungen haben, so würden die Vorschriften wegfallen, die voraussetzen, daß man weiß, in welchen Verhältnissen die Einheiten der einzelnen Zahlen zu einander stehn, die bei ihnen zum Grunde liegen. Die übrigen Vorschriften blieben aber unverändert. Sollte daher eine kleinere zuverringernde Zahl über einer größern subtrahirenden stehn, so würde die Differenz negativ werden, und sollte sich der Fall ereignen, daß unter den subtrahirenden eine Zahl wäre, von der man keine von gleicher Art unter den zuverringeraden fände, so würde man sie mit dem Zeichen (—) in die Differenzreihe schreiben. Die Ordnung, in welcher die zuverringernden und die subtrahirenden Zahlen neben einander gestellt werden, ist die, daß man sie so von der Linken nach der Rechten auf einander folgen läßt, als ihre Benennungen, nämlich die Buchstaben, im Alphabete auf einander folgen.

1. *Beispiel.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 5a & + & 3b & + & 6c & + & 7d & + & 8e \\ & & 2b & + & 3c & + & 4d & + & 2e \\ \hline 5a & + & b & + & 3c & + & 3d & + & 6e \end{array}$$

2. *Beispiel.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 7a & + & 8b & + & 5c & + & 4d & + & 12e \\ & & 13b & + & 5c & + & 3d & + & 16e \\ \hline 7a & - & 5b & \cdot & \cdot & + & d & - & 4e \end{array}$$

3. *Beispiel.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3a & + & 17b & + & 8c & + & 5d & + & 12e & & \\ 2a & + & 13b & + & 2c & + & 4d & + & 12e & + & 6f \\ \hline a & + & 4b & + & 6c & + & d & \cdot & \cdot & - & 6f \end{array}$$

§. 34.

Aufgabe.

Mehrere benannte Zahlen von einander zu subtrahiren, die nicht alle unter einerlei Bedingung gedacht werden.

Auflösung.

Haben die gegebenen Zahlen keine allgemeine Benennungen, so trenne man die positiven zuverringernden Zahlen von den negativen zuverringernden, suche die Summe der erstern und die Summe der letztern, und suche nun wieder das Aggregat dieser beiden Summen nach §. 32. Eben so verfahre man mit den gegebenen subtrahirenden Zahlen. Ist dieses geschehn, so gebe man dem subtrahirenden Aggregate das entgegengesetzte Zeichen und addire es, unter der jetzigen Bedingung gedacht, zu dem zuverringernden Aggregate nach §. 32. Die Summe, welche man hierdurch erhält, ist die verlangte Differenz der gegebenen Zahlen.

Haben die gegebenen Zahlen allgemeine Benennungen, so suche man ebenfalls erst die Summe der zuverringernden und die Summe der subtrahirenden Zahlen nach §. 32. Hierauf schreibe man das subtrahirende Aggregat unter das zuverringernde, als sollten sie zu einander addirt werden, gebe den subtrahirenden Zahlen das entgegengesetzte Zeichen von dem, was sie haben, und addire sie, unter dieser Bedingung gedacht, zu den über ihnen stehenden zuverringernden Zahlen. Die gefundene Summe ist die verlangte Differenz.

Den Beweis enthält §. 20. 1ter Zusatz.

Beispiele für Zahlen mit bestimmten Benennungen.

1. *Beispiel.*

Es sollen von 5 Louisd'., 4 rthlr., — 9 ggl., — 2 rthlr. und 6 pf., die Zahlen 8 Louisd'., 1 rthlr., — 4 Louisd'. + 5 ggl., 3 pf. subtrahirt werden.

Zuverringerndes Aggregat	5 Louisd'.	+ 1 thl.	+ 14 ggl.	+ 6 pf.
Subtrahirendes Aggregat	4 Louisd'.	+ 1 thl.	+ 5 ggl.	+ 3 pf.
	—	—	—	—
Differenz	1 Louisd'.	- -	+ 9 ggl.	+ 3 pf.

2. *Beispiel.*

Zuverringerndes Aggregat	3 Louisd'. +	4 thl. +	6 ggl. +	7 pf.
Subtrahirendes Aggregat	— 5 Louisd'. —	3 thl. —	4 ggl. —	7 pf.
	+	+	+	+
Differenz	+ 9 Louisd'. +	2 thl. +	11 ggl. +	2 pf.

3. *Beispiel.*

— 10 Louisd'.	— 3 thl.	— 2 ggl.	— 4 pf.
— 8 Louisd'.	— 2 thl.	— 1 ggl.	— 3 pf.
+	+	+	+
— 2 Louisd'.	— 1 thl.	— 1 ggl.	— 1 pf.

Beispiele für Zahlen mit allgemeinen Benennungen.

1. *Beispiel.*

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & + 3b & + 4c & + 5d & + 3e \\ - 2a & - 2b & - 2c & - d & - 2e \\ + & + & + & + & + \\ \hline 7a & + 5b & + 6c & + 6d & + 5e \end{array}$$

2. *Beispiel.*

$$\begin{array}{rrrrr} 8a & - 2b & + 3c & - 4d & - 5e \\ 7a & - 3b & - 4c & + 5d & - 7e \\ - & + & + & - & + \\ \hline a & + b & + 7c & - 9d & + 2e \end{array}$$

3. *Beispiel.*

$$\begin{array}{rrrrrrr} 6a & + 3b & - 4c & + 5d & - 3e & & \\ - 6a & - 6b & + 5c & - 3d & & - 6f & + 8g \\ + & + & - & + & & + & - \\ \hline 12a & + 9b & - 9c & + 8d & - 3e & + 6f & - 8g \end{array}$$

Die Zeichen, die in den Beispielen unter die subtrahirenden Zahlen gesetzt sind, sollen die Verwandlungen ihrer Zeichen anzeigen.

1) Man setzt den Multiplicator so unter das Multiplicand, dass die Stelle der Einer des Multiplicators unter der Stelle der Einer des Multiplicands steht, dass sich ferner die Stelle der Zehner des Multiplicators unter der Stelle der Zehner des Multiplicands befindet u. s. w.

2) Man multiplicirt das Multiplicand nach den Gesetzen der einzelnen Ziffern des Multiplicators, fängt diese Multiplication nach dem Gesetze der Einer an, und setzt jedesmal die Anfangsstelle des Products unter die Ziffer des Multiplicators, nach deren Gesetze das Product entstand.

3) Hierauf addirt man alle Producte in der Stellung, welche sie unter einander haben, und die dadurch erhaltene Summe ist das verlangte Product der beiden gegebenen Zahlen.

Beispiel.

```
   34562
     362
   -----
   69124
 207372
103686
--------
12511444
```

1. Zusatz.

Es kann sich der Fall ereignen, dass in dem Multiplicande oder dem Multiplicator eine oder mehrere Nullen vorkommen. Kommen sie in dem Multiplicande vor, so übergeht man diese Nullen, und verfährt, als hätte man die Ziffern dieser Stellen schon multiplicirt.

Beispiel.

```
   20305
     702
   -----
   40610
142135
--------
14254110
```

2. Zusatz.

Wird die Zahl 362 nach dem Gesetze der Zahl 34562 multiplicirt, so erhält man das nämliche Product 12511444, und bekömmt bei der Multiplication selbst folgende Figur:

```
     724
    2172
   1810
  1448
 1086
--------
12511444
```

Die Zahlen 724, 2172, 1810, 1448, 1086 nenne ich hier Producte der Ziffern des Multiplicands, bezeichne ein jedes mit π, und gebe einem jeden π die Ordnung, welche die Ziffer des Multiplicands hat, nach deren Gesetze es entstanden ist; so ist z. B. 1086 ein π von der vierten Ordnung, weil es des Multiplicands Ziffer 3 zugehört, die von der vierten Ordnung ist.

Bei der Addition dieser π fliessen von den π geringerer Ordnung zu den π höherer Ordnung Einheiten über, aber es fliessen doch nie so viele zu einem π, dass dieses dadurch um den Multiplicator vergrössert werden könnte. Denn die geringste Ziffer eines π stimmt allemal mit der Ordnung überein, die der Ziffer zugehört, der dieses π zukömmt. So ist z. B. in dem Multiplicande 34562 die Ziffer 3 von der vierten Ordnung, und von eben der Ordnung ist auch in dem dazugehörigen π 1086, die geringste Ziffer 6. Sollte daher 1086 durch den Zufluss von den vorhergehenden π um den Multiplicator grösser werden, so müsste der Zufluss so viel als 3620000 betragen, weil 1086 so viel als 10860000 ist, also es müsste der Zufluss wenigstens gleich 362 . 10000, d. h. gleich dem Multiplicator in die Einheit von der vierten Ordnung multiplicirt seyn. Aber in dem Multiplicande 34562 ist die Summe 4000 + 500 + 60 + 2 noch nicht gleich 10000, folglich kann auch 4000 + 500 + 60 + 2, nach dem Gesetze von 362 multiplicirt, noch nicht so viel als 3620000 betragen, also noch viel weniger, was von ihnen zu 1086 überfliesst.

Kennt

Kennt man daher in dem Producte 1251444, was P heissen mag, die Anfangsstelle eines π, und es folgen diesem keine andern, so enthalten die Ziffern des P von der Anfangsstelle dieses π bis zu der ersten Ziffer von P zur linken, den Multiplicator nur so oft, als die Ziffer des Multiplicands Einheiten hat, zu welcher das π gehört. So fängt sich z. B. in dem Producte 1251444 das π 1086 in der 1 an, die auf 5 folgt, daher kann auch der Multiplicator in 1251 nur dreimal enthalten seyn, weil des Multiplicands Ziffer 3, diesem π 1086 zugehört.

Da nun die geringste Ziffer eines π allemal von der Ordnung der Ziffer des Multiplicands ist, nach deren Gesetze es entstand, so ist einleuchtend, dass in P die Anfangsstellen der π so auf einander folgen, wie die einzelnen Ziffern im Multiplicande, wozu sie gehören. Weiss man also in P nur anzugeben, wo sich das π von der höchsten Ordnung anfängt, so werden sich auch die Anfangsstellen der übrigen π darin angeben lassen. Die Anfangsstelle des höchsten π findet man aber dadurch, dass man z. E. in unserm Beispiele den Multiplicator 362 mit so vielen der höchsten Ziffern des Producis P vergleicht, dass diese ihn wenigstens einmal und höchstens neunmal enthalten; die geringste dieser Ziffern ist alsdenn die Anfangsstelle des höchsten π. Denn in den höchsten Ziffern von P ist nur das höchste π zu sehen; es müssen ihrer aber auch so viele seyn, dass sie den Multiplicator wenigstens einmal enthalten, weil die höchste Ziffer des Multiplicands nicht kleiner als 1 seyn kann, und mehr als neunmal darf der Multiplicator nicht in ihnen enthalten seyn, weil die höchste Ziffer des Multiplicands nicht grösser als 9 seyn kann. — Wollte man annehmen, dass die geringste dieser Ziffern in P nicht die Anfangsstelle des π der höchsten Ziffer wäre, so setze man noch eine Ziffer hinzu, oder nehme eine weg. Im ersten Falle erhält man so viele Ziffern, dass diese den Multiplicator mehr als neunmal enthalten, und im letzten Falle enthalten sie den Multiplicator noch nicht ein einzigesmal.

Da nun dem höchsten π in P kein anderes vorhergeht, so enthalten auch die höchsten Ziffern von P, welche den Multipli-

plicator wenigstens **einmal** und höchstens **neunmal** in sich begreifen, den Multiplicator nur so oft, als die höchste Ziffer des Multiplicands Einheiten hat; wird also von ihnen das höchste π abgezogen, so bleiben nur noch Ziffern übrig, die den nachfolgenden π zugehören. Setzt man also zu diesem Reste die Ziffer des P, welche auf die Anfangsstelle des ersten π folgt, so erhält man die Zahl, die nur das π der zweiten Ziffer des Multiplicands, nebst dem Zuflusse der Einheiten von π geringerer Ordnung enthält. Folglich die ganze Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplicator darin enthalten sey, ist die zweite Ziffer des Multiplicands. Multiplicirt man diese nach dem Gesetze des Multiplicators, so erhält man das zweite π, welches, von jenen Ziffern subtrahirt, nur noch den Zufluss von den darauf folgenden π übrig lässt u. s. w.

Enthält aber ein Rest nebst der hinzugesetzten Ziffer aus dem P den Multiplicator noch nicht, so ist dieses auch ein Zeichen, dass das Multiplicand eine Ziffer nicht hatte, folglich, dass ihre Stelle Null einnahm u. s. w.

---

4. Division.

§. 37.

Aufgabe.

Eine Zahl, die aus einer Ziffer besteht, nach dem Gesetze einer andern zu dividiren, die ebenfalls nur eine hat.

Auflösung.

Aus der Erklärung der Division folgt, dass wenn man das Dividend in so viele gleiche Theile zerlegt hat, als der Divisor Einheiten besitzt, dass alsdenn ein jeder dieser Theile der Quotient sey.

1. Beispiel.

Es soll 8 nach dem Gesetze von 2 dividirt werden. Hier ist $8 = 4 + 4$, folglich ist 4 der Quotient.

2. Beispiel.

Es soll 9x nach dem Gesetze von 5 dividirt werden. Hier ist $9x = x + x + x + x + x + 4x$. Um also die fünf gleichen Theile von 9x zu erhalten, muss zu jeder der fünf einzelnen x, der fünfte Theil von 4x gesetzt werden, welchen man offenbar erhält, wenn man x als eine Summe von fünf gleichen Theilen ansieht und sich nur den Inbegriff von vier dieser Theile denkt, oder der fünfte Theil von 4x ist ein Bruch, welcher nur vier solcher Theile enthält, wovon x fünfe besitzt, folglich zeigt seinen Werth der Ausdruck $\frac{4}{5}x$ an (§. 8. willk. Satz), und daher ist

$$9x = (x + \tfrac{4}{5}x) + (x + \tfrac{4}{5}x) + (x + \tfrac{4}{5}x) + (x + \tfrac{4}{5}x) + (x + \tfrac{4}{5}x),$$

also der Quotient $9x : 5 = x + \frac{4}{5}x$.

Nimmt man auf x nicht Rücksicht oder ist $x = 1$, so erhält man $9 : 5 = 1 + \frac{4}{5}$.

1. Zusatz.

Das zweite Beispiel lehrt folgenden allgemeinen Satz: Wenn das Dividend für den Divisor nicht theilbar ist, so sucht man eine ganze Zahl auf, welche, nach dem Gesetze des Divisors multiplicirt, ein Product gibt, welches, von dem Dividende subtrahirt, einen Rest gibt, welcher kleiner als der Divisor ist. Diese ganze Zahl nebst einer gebrochnen, welche den gefundenen Rest zum Zähler und den Divisor zum Nenner hat, ist der gesuchte Quotient. Wenn also $D - dQ = R$, so dass R kleiner als d ist, so ist $D : d = Q + \frac{R}{d}$.

Anmerkung.

Der Ausdruck $Q + \frac{R}{d}$ wird eine vermischte Zahl genannt.

2. Zusatz.

Da $D - dQ = R$, so ist $D = dQ + R$; oder das Dividend ist eine Summe des Restes und des Productes des Divisors nach dem Gesetze des Quotienten.

3. Zu-

3. Zusatz.

Wenn in $D : d = Q + \frac{R}{d}$, $Q = 0$, also $D = R$ ist, so ist der gesuchte Quotient der Zahl D nach dem Gesetze von $d = \frac{R}{d}$. Oder wenn das Dividend kleiner als der Divisor ist, so zeigt den Quotienten eine gebrochne Zahl an, deren Zähler das Dividend, und deren Nenner der Divisor ist.

4. Zusatz.

Eine gebrochne Zahl kann auch als ein Quotient angesehn werden, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner ist. In diesem Falle macht uns nämlich die gebrochne Zahl mit dem Werthe bekannt, den der Bruch, durch Theile des Ganzen ausgedrückt, besitzt.

§. 38.

Aufgabe.

Eine Zahl, die aus mehrern Ziffern besteht, nach dem Gesetze einer kleinern, die ebenfalls mehrere Ziffern hat, zu dividiren.

Auflösung.

1) Man vergleicht den Divisor mit den höchsten Ziffern des Dividends, und sucht dadurch die Anfangsstelle des höchsten π zu bestimmen (§. 36.), welches π also ein Product des Divisors nach dem Gesetze der höchsten Ziffer des Quotienten ist.
2) Man setzt den Divisor so unter die höchsten Ziffern des Dividends, daſs des Divisors Ziffer der Einer, unter der Anfangsstelle des höchsten π steht.
3) Man sucht eine Zahl auf, deren Product nach dem Gesetze des Divisors, von dem über dem Divisor befindlichen Theile des Dividends subtrahirt, eine kleinere Zahl übrig läſst, als der Divisor ausmacht. Diese Zahl ist die höchste Ziffer des Quotienten.
4) Man multiplicirt diese höchste Ziffer nach dem Gesetze des Divisors, so hat man das höchste π, und subtrahirt

dieses von dem Theile des Dividends, der über dem Divisor steht. Die Differenz ist die Summe der Einheiten, die von den π geringerer Ordnung übergeflossen sind.

5) Man setzt zu dieser Differenz die Ziffer des Dividends, welche zunächst auf die Anfangsstelle des höchsten π folgt, und sucht vermittelst dieses π und des Divisors wieder nach (3), die zweite Ziffer des Quotienten.

6) Sollte durch Hinzusetzung einer Ziffer des Dividends zu einer Differenz keine Zahl entstehn, welche grösser oder doch wenigstens gleich dem Divisor ist, so ist dieses ein Zeichen, dass in dem Quotienten eine Ziffer einer gewissen Ordnung fehlt, nämlich die Ziffer, welche auf die zuletzt gefundene folgen müsste. Es wird daher in den Quotienten statt einer Ziffer eine Null gesetzt, und aus dem Dividende noch eine Ziffer heruntergezogen. Sollte auch die hierdurch entstandene Zahl kleiner als der Divisor seyn, so wird in den Quotienten noch eine Null gesetzt, und von dem Dividende noch eine Ziffer heruntergezogen u. s. w. Kurz dies eben angeführte Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine Zahl erhält, welche grösser oder doch wenigstens so gross als der Divisor ist, und auf diese werden dann wieder die Regeln von 2, 3, 4 angewandt.

7) Befinden sich in dem Dividende Nullen, so hat dies auf keine Veränderung der vorhin gegebenen Regeln Einfluss, sondern man zieht diese Nullen statt der Ziffern herunter, deren Stelle sie einnehmen.

8) Sollte am Ende noch ein Rest übrig bleiben, zu welchem keine Ziffer des Dividends mehr gesetzt werden kann, weil das Dividend keine mehr besitzt, so schreibt man neben dem erhaltenen Theil des Quotienten eine gebrochne Zahl, deren Zähler der Rest, und deren Nenner der Divisor ist. Diese vermischte Zahl ist der gesuchte Quotient.

Beweis.

Die Richtigkeit der Regeln, die in 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) vorgeschrieben sind, erhellet aus §. 36., und die Regel, welche in 8) enthalten ist, gründet sich auf §. 37.

1. Bei-

1. Beispiel.

Dividend - - -	83145366	342162 Quotient.
Divisor - - - -	243	
Höchste Ziff. des Quot.	3	
Höchstes π - - - -	729	
Erster Rest - - - -	102	
	1024	
Divisor - - - - -	243	
Zweite Ziff. des Quot.	4	
Zweites π - - - -	972	
Zweiter Rest - - -	52	
	525	
Divisor - - - - -	243	
Dritte Ziffer des Quot.	2	
Drittes π - - - - -	486	
Dritter Rest - - -	39	
	393	
Divisor - - - - - -	243	
Vierte Ziffer des Quot. -	1	
Viertes π - - - - -	243	
Vierter Rest - - - -	150	
	1506	
Divisor - - - - - -	243	
Fünfte Ziffer des Quot. -	6	
Fünftes π - - - - -	1458	
Fünfter Rest - - - - -	48	
	486	
Divisor - - - - - -	243	
Sechste Ziffer des Quot. -	2	
Sechstes π - - - - - -	486	
Sechster Rest - - - - -	000	

Anmerkung.

1) Bei diesem Beispiele sind die Reste immer noch einmal unter sich selbst gesetzt, und zu dem darunter gesetzten ist erst die dazugehörige Ziffer des Dividends gefügt.

2) Die vierte Ziffer des Quotienten ist gleich 1, sie kann also den Divisor bei der Multiplication nicht verändern, es ist aber doch mit ihr verfahren, als wenn dies der Fall wäre.

Daſs man aber bei der Division so zu verfahren nicht nöthig habe, erhellet deutlich aus den dafür gegebenen Regeln; hier ist es nur geschehn, um dadurch die Regeln der Division desto deutlicher vor Augen stellen zu können.

2. Beispiel.

```
Dividend  63126 | 1503 Quotient.
Divisor   42|||
          211||
           42||
            5||
          210||
            126
             42
              3
            126
            000
```

3. Beispiel.

```
Dividend  1300260 | 20004 Quotient.
Divisor   65||||
           2||||
          130||||
          0000260
              65
               4
             260
             000
```

4. Bei-

4. *Beispiel.*

Dividend 10582 | $460\frac{2}{23}$ Quotient.
Divisor 23
4
92
138
23
6
138
0002

Zusatz.

Für den Fall, wenn eine Zahl, die aus mehrern Ziffern besteht, nach dem Gesetze einer andern dividirt werden soll, die nur eine Ziffer hat, gelten die gegebenen Regeln ebenfalls.

Viertes Kapitel.

Von den Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen.

§. 39.

Erklärung.

Eine ganze Zahl, die grösser als 1 ist, und ausser für 1 und sich selbst, noch für irgend eine andere Zahl theilbar ist, heisst eine zusammengesetzte Zahl. Hingegen eine ganze Zahl, die grösser als 1 ist, die aber nur für 1 und sich selbst theilbar ist, wird eine Primzahl genannt.

§. 40.

Lehrsatz.

Eine jede zusammengesetzte Zahl ist ein Product aus Primzahlen.

Beweis.

Sollte man bei dem Aufsuchen der kleinsten Factoren einer zusammengesetzten Zahl nie auf lauter Primzahlen kommen, so müsste eine jede zusammengesetzte Zahl ein Product seyn, was eine unendliche Reihe von kleinen zusammengesetzten Zahlen als Factoren in sich begriffe, sie müsse also unendlich seyn. Dies ist aber absurd, folglich auch die Behauptung, dass ihre kleinsten Factoren keine Primzahlen sind.

Anmerkung.

Die Factoren einer Zahl, welche Primzahlen sind, heissen ihre einfache Factoren.

§. 41.

Lehrsatz.

Wenn Primzahlen gefunden sind, die, unter sich wechselseitig multiplicirt, die zusammengesetzte Zahl P geben, so gibt es ausser jenen keine Primzahl, die Factor von P seyn könnte.

Beweis.

Wenn a, b, c, d Primzahlen sind, und abcd = P ist, und sich nun P sollte nach dem Gesetze der Primzahl α ohne Rest theilen lassen, so müsste entweder α das für P seyn, was einer jener Factoren ist, oder was mehrere jener Primzahlen für P als Factoren sind. D. h. es müsste entweder α zu jenen Primzahlen gehören, oder ein Product derselben seyn. Beides ist aber wider die Bedingung, folglich ist auch α kein Factor von P.

§. 42.

Aufgabe.

Zu bestimmen, ob eine Zahl eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sey.

Auflösung.

Nach §. 39. ist die allgemeine Regel, wodurch der Aufgabe eine Genüge geschieht, folgende: Man stellt mit allen

Zah-

len, die kleiner als die gegebene, aber grösser als 1 sind, sache an, ob die gegebene für eine derselben theilbar sey. Ist sie für eine oder mehrere jener Zahlen theilbar, so ist sie ; zusammengesetzte, ist dies aber nicht der Fall, so ist sie e Primzahl.

1. Anmerkung.

Hat man schon mit einigen Zahlen vergeblich Versuche gestellt, so ist es unnütz, mit Zahlen Versuche zu machen, ; Producte jener Zahlen sind. (§. 27. 12. Zus.)

2. Anmerkung.

Wenn A eine grosse Zahl ist, und man will nach der vorn gegebenen Regel erfahren, ob sie eine Primzahl sey, so .nn der Versuch mühsam werden. Man hat daher Tabellen efertigt, worin viele Primzahlen nach der Ordnung aufgellt sind, in welcher sie von 1 an auf einander folgen. Eine lche befindet sich in Lamberts Zusätzen zu den logarithmischen nd trigonometrischen Tabellen, die von 1 bis 101999 geht.

3. Anmerkung.

Bei einigen Zahlen hat man gewisse Kennzeichen, die gleich beim ersten Anblicke zu erkennen geben, dass eine Zahl zusammengesetzt sey. Hierhin gehören folgende:

1) Die Zahlen, deren Stelle der Einer eine grade Zahl einnimmt, sind für 2 divisibel.

2) Eine Zahl, die sich mit der Ziffer 5 endigt, ist auch für 5 theilbar.

3) Endigt sich eine Zahl mit Null, so ist sie für 2, 10 und 5 divisibel.

4) Läßt sich die Summe der Ziffern einer Zahl nach dem Gesetze der 3 ohne Rest dividiren, so ist auch die Zahl für 3 theilbar.

5) Wenn die Anzahl der Ziffern einer Zahl gerade ist, und die Ziffern unter sich gleich sind, so läßt sich die Zahl nach dem Gesetze von 11 ohne Rest theilen.

§. 43.

Erklärung.

1) Wenn mehrere ganze Zahlen ausser 1 keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so heissen sie **Primzahlen unter sich.** Es können also Zahlen **unter sich** Primzahlen seyn, die, **für sich** betrachtet, zusammengesetzt sind. So sind z. B. 15 und 26 unter sich Primzahlen, weil sie nicht beide für eine und dieselbe Zahl, grösser als 1, theilbar sind. Aber jede allein betrachtet, ist eine zusammengesetzte Zahl, denn 15 ist für 3 und 5, und 26 sind für 2 divisibel.

2) Zahlen, die noch ausser 1 einen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden zusammengesetzte Zahlen unter sich genannt. So sind 9 und 6 zusammengesetzte Zahlen unter sich, weil sie den gemeinschaftlichen Divisor 3 haben. Damit also Zahlen unter sich zusammengesetzte seyn können, dazu wird nicht nothwendig erfordert, dass eine jede dieser Zahlen für sich betrachtet eine zusammengesetzte sey; so sind z. B. 13 und 26 unter sich zusammengesetzte Zahlen, obgleich 13 eine Primzahl ist.

§. 44.

Aufgabe.

Alle ganze Factoren einer zusammengesetzten Zahl A zu finden.

Auflösung.

1) Man macht mit allen Primzahlen, die kleiner als A sind, den Versuch, ob sie für diese divisibel seyn, und fängt bei diesem Versuche mit der kleinsten Primzahl an. Findet man eine, wofür A theilbar ist, so wird A nach dem Gesetze dieser Primzahl dividirt. Mit dem Quotienten verfährt man wieder, wie mit A verfahren ist, und setzt dies so lange fort, bis man auf einen Quotienten stösst, der eine Primzahl ist. Die gefundenen Primzahlen, wofür A ohne Rest theilbar war, und der letzte Quotient sind alsdenn alle einfache Factoren von A.

2) Diese einfachen Factoren werden unter sich zu zwei, drei, vier u. s. w. multiplicirt. Die hierdurch erhaltenen Producte sind alle zusammengesetzte Factoren von A.

Beweis.

Ad 1) Wird A nach dem Gesetze einer Primzahl p dividirt, so wird ein Factor p elidirt: Der Quotient enthält noch die übrigen Factoren. Wird daher dieser nach dem Gesetze einer Primzahl q dividirt, so wird auch der Factor q elidirt u. s. w. Setzt man also diese Operation so lange fort, bis der Quotient selbst eine Primzahl ist, d. i. so lange, bis keine Factoren mehr zu elidiren sind, so hat man gewiss Primzahlen gefunden, deren Product gleich A ist. Es kömmt hier nur auf die Frage an, ob man auch bei fortgesetzter Division allemal auf einen Quotienten komme, der selbst eine Primzahl ist, und wenn dies der Fall ist, ob auch nur die gefundenen Primzahlen einfache Factoren von A seyn können. Das erstere erhellet aber aus §. 40. und das letztere aus §. 41.

Ad 2) Ist A für gewisse Zahlen theilbar, so ist A es auch für die Producte dieser Zahlen unter einander, und soll A für ein Product B divisibel seyn, so muss sich auch A nach dem Gesetze der einfachen Factoren von B ohne Rest dividiren lassen. (§. 27. 12. Zus.) Hieraus folgt also:

1) Dass die Producte der gefundenen Primzahlen wieder Factoren von A sind, und

2) Dass sich A durch keine zusammengesetzte Zahl theilen lässt, die nicht bloss ein Product jener Primzahlen, also nicht unter den eben genannten Producten befindlich ist.

Beispiel.

Es sollen die ganzen Factoren von 462 gesucht werden.

$$462 : 2 = 231$$
$$231 : 3 = 77$$
$$77 : 11 = 7$$

Man dividirt die grösere Zahl nach dem Gesetze der kleinern. Bleibt ein Rest, so wird der vorige Divisor nach seinem Gesetze dividirt. Bleibt noch ein Rest, so dividirt man wieder den vorigen Divisor nach dieses Rests Gesetze, und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist alsdenn der gesuchte gröste gemeinschaftliche Factor der beiden gegebenen Zahlen.

Beweis.

Hier muss bewiesen werden:

1) Dass man durch fortgesetzte Division endlich auf einen Rest kömmt, für den der nächstvorhergehende völlig theilbar ist.

2) Dass beide gegebene unter sich zusammengesetzten Zahlen für diesen Rest theilbar sind.

3) Dass dieser Rest auch der gröste gemeinschaftliche Factor der beiden gegebenen Zahlen ist.

Ad 1.

Ein jeder Rest ist kleiner, als der ihm zugehörige Divisor; es wird aber allemal der letzte Rest wieder Divisor des vorigen Divisors, folglich nehmen die Divisoren, also auch die Reste ab. Da nun diese ganze Zahlen sind und um ganze Zahlen abnehmen, die nicht gröser als sie werden können, so müssen sie bei immerwährender Abnahme endlich verschwinden.

Ad 2.

Es mögen die gegebenen unter sich zusammengesetzten Zahlen M und m seyn, so dass M die grösere und m die kleinere ist.

Nun sey α) $M : m = Q$ und es bleibe der Rest R
Ferner sey β) $m : R = q$ und der neue Rest gleich r
γ) $R : r = p$ und der neue Rest gleich ϱ
δ) $r : \varrho = t$ und der Rest gleich 0,

so folgt aus §. 37. 2. Zus. folgendes:

a) $M = mQ + R$
b) $m = Rq + r$
c) $R = rp + \varrho$
d) $r = \varrho t$

Ist

Ist folglich r durch ϱ divisibel, so ist es auch R, und aus diesem Grunde auch m, und aus dieser Ursache auch M.

Ad 3.

Da $M = mQ + R$, so lässt sich das Dividend nach dem Gesetze der Zahl ohne Rest theilen, wofür der Divisor und der Rest gemeinschaftlich theilbar sind, folglich ist der grösste gemeinschaftliche Factor des Divisors und des Restes auch ein Factor des Dividends.

Ferner ist $M - mQ = R$, folglich ist der Rest für die Zahl divisibel, wofür das Dividend und der Divisor gemeinschaftlich theilbar sind, daher ist auch der grösste gemeinschaftliche Factor des Dividends und des Divisors ein Factor des Restes.

Aus diesen beiden Sätzen folgt, dass der grösste gemeinschaftliche Factor des Restes und des Divisors, auch der grösste gemeinschaftliche Factor des Divisors und des Dividends sey. Nun ist aber ϱ der grösste gemeinschaftliche Factor von ϱ und r, folglich auch nach 2. von r und R, und daher auch von R und m, und aus diesem Grunde auch von m und M.

Fünftes Kapitel.

Von der Rechnung mit gebrochnen Zahlen.

§. 48.

Lehrsatz.

Eine gebrochne Zahl bleibt unverändert, wenn ihr Zähler und Nenner nach dem Gesetze einer und der nämlichen ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

Beweis.

Um die gebrochne Zahl zu erhalten, welche den relativen Werth des Bruchs in Rücksicht auf das Ganze anzeigen soll, muss man den Bruch und das Ganze durch einen gemeinschaftlichen Maasstab messen. (§. 6.) Wie gross aber dieser Maasstab sey,

darauf

darauf kömmt nichts an, der Werth der gebrochnen Zahl ist bei jedem Maassstabe der nämliche. Nun ist aber doch wohl einleuchtend, dass ma zum Maassstabe gewählt, nur Zahlen geben kann, welche die m^{ten} Theile von den Zahlen sind, welche der Maasstab a gibt. Hätte man also die gebrochne Zahl $\frac{mz}{mn}$ durch den Maasstab a erhalten, so würde man durch den Maasstab ma die gebrochne Zahl $\frac{z}{n}$ bekommen, folglich müsste $\frac{mz}{mn} = \frac{z}{n}$ seyn. $\frac{z}{n}$ erhält man aber aus $\frac{mz}{mn}$, wenn man sowohl den Zähler mz, als den Nenner mn, nach dem Gesetze von m dividirt, und $\frac{mz}{mn}$ erhält man aus $\frac{z}{n}$, wenn man den Zähler z und den Nenner n nach dem Gesetze der Zahl m multiplicirt, folglich ist die Wahrheit des Lehrsatzes bewiesen.

§. 49.

1. Erklärung.

Eine gebrochne Zahl hat die einfachste Form, ist durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt, hat die kleinste Benennung, wenn Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind.

Anmerkung.

Sind also Zähler und Nenner einer gebrochnen Zahl Primzahlen, so hat sie auch die einfachste Form. Sie kann diese aber auch haben, wenn gleich Zähler und Nenner, jede dieser Zahlen für sich betrachtet, zusammengesetzte sind. (§. 43.) Sie müssen aber unter sich zusammengesetzte Zahlen seyn, wenn die gebrochne Zahl nicht die einfachste Form haben soll. Hierzu wird also nicht erfordert, dass sowohl der Zähler als der Nenner, jede für sich betrachtet, zusammengesetzte Zahlen sind. (§. 43.)

2. Erklärung.

Einer gebrochnen Zahl, die nicht die einfachste Form hat, die kleinste Benennung geben, heisst aus ihr eine andere,

am

am Werthe gleichgültige, machen, deren Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind. Die Handlung, wodurch dies geschieht, wird auch Aufhebung der gebrochnen Zahlen genannt.

§. 50.

Aufgabe.

Eine gebrochne Zahl, die nicht die einfachste Form hat, auf die kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man suche den grösten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners auf (§. 46.), und dividire nach dessen Gesetze beide Zahlen; die gebrochne Zahl, welche hierdurch erhalten wird, ist die verlangte.

Beweis.

Die erhaltene gebrochne Zahl ist mit der gegebenen gleichgültig, weil Zähler und Nenner nach dem Gesetze einer und derselben Zahl dividirt sind. Sie hat aber auch die einfachste Form, weil ihre Zähler und Nenner unter sich Primzahlen sind. (46.)

Zusatz.

Wenn der Nenner einer gebrochnen Zahl für den Zähler theilbar ist, so wird sie auf die kleinste Benennung gebracht, wenn man Zähler und Nenner nach dem Gesetze des Zählers dividirt.

§. 51.

1. Erklärung.

Gebrochne Zahlen haben einerlei Benennung, wenn ihre Nenner einerlei sind, und sie haben unter sich die kleinste gemeinschaftliche Benennung, wenn ihre Zähler und der gemeinschaftliche Nenner unter sich Primzahlen sind.

2. Erklärung.

Gebrochnen Zahlen von einerlei, aber nicht unter sich kleinsten Benennung, die kleinste gemeinschaftliche Benennung geben, heisst andere, jenen gleichgültige gebrochne Zahlen fin-

den, deren Zähler und der gemeinschaftliche Nenner unter sich Primzahlen sind.

3. Erklärung.

Gebrochne Zahlen mit ungleichen Nennern unter einerlei Benennung bringen, heisst andere finden, die mit jenen gleichen Werth und einerlei Nenner haben.

§. 52.

Aufgabe.

Mehrern gebrochnen Zahlen von gleicher, aber nicht unter sich kleinsten Benennung, die kleinste gemeinschaftliche Benennung zu geben.

Auflösung.

Man dividire die Zähler und den gemeinschaftlichen Nenner nach dem Gesetze ihres grössten gemeinschaftlichen Divisors. Die gebrochnen Zahlen, welche man hierdurch erhält, sind die gesuchten.

Beweis.

Die erhaltenen gebrochnen Zahlen sind den vorigen gleichgültig, weil die Zähler und der gemeinschaftliche Nenner nach dem Gesetze einer und derselben Zahl dividirt sind. Und sie haben unter sich die kleinste gemeinschaftliche Benennung, weil ihre Zähler und der gemeinschaftliche Nenner unter sich Primzahlen sind. (§. 46.)

§. 53.

Aufgabe.

Mehrere gebrochne Zahlen mit ungleicher Benennung unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man multiplicire Zähler und Nenner einer jeden gebrochnen Zahl, nach dem Gesetze des Products der Nenner der übrigen gebrochnen Zahlen.

Beweis.

Die erhaltenen gebrochnen Zahlen haben mit den vorigen einerlei Werth. (§. 48.) Sie haben aber auch einerlei Nenner,

weil

weil ein jeder das Produkt der Nenner aller gegebenen gebrochnen Zahlen ist.

1. Beispiel.

Es sollen $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ unter einerlei Benennung gebracht werden. Die gesuchten gebrochnen Zahlen sind folgende:

$$\frac{3.7.3.9}{4.7.3.9},\ \frac{5.4.3.9}{4.7.3.9},\ \frac{1.4.7.9}{4.7.3.9},\ \frac{2.4.7.3}{4.7.3.9},$$ oder $\frac{567}{756}$, $\frac{540}{756}$, $\frac{252}{756}$, $\frac{168}{756}$.

2. Beispiel.

Es sollen folgende gebrochne Zahlen mit allgemeinen Zeichen unter einerlei Benennung gebracht werden:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h}.$$

Die gesuchten gebrochnen Zahlen sind diese:

$$\frac{adfh}{bdfh},\ \frac{bcfh}{bdfh},\ \frac{bdeh}{bdfh},\ \frac{bdfg}{bdfh}.$$

Anmerkung.

Die gegebene Aufgabe verlangt, daſs im allgemeinen eine Methode angegeben werden soll, nach welcher mehrere gebrochne Zahlen von ungleicher Benennung unter einerlei Benennung gebracht werden, und dieser Forderung thut die gegebene Auflösung völlig ein Genüge. Wird aber in einer Aufgabe nicht nur verlangt, daſs mehrere gebrochne Zahlen unter einerlei Benennung gebracht werden, sondern daſs die erhaltenen gebrochnen Zahlen auch unter sich die kleinste Benennung haben sollen, so wird man durch jene Auflösung nur dann seinen Zweck erreichen, wenn die Nenner der gebrochnen Zahlen unter sich nicht zusammengesetzt sind, und die gebrochnen Zahlen selbst die einfachste Form haben.

§. 54.

Aufgabe.

Eine Regel zu finden, nach welcher mehrere gebrochne Zahlen von der einfachsten Form, deren Nenner aber unter sich

zusammengesetzte Zahlen sind, unter einerlei, aber auch kleinste Benennung gebracht werden.

Auflösung.

Man sucht die einfachen Factoren der Nenner auf, und vergleicht sie mit einander. Hierauf multiplicirt man den Zähler und Nenner einer jeden gebrochnen Zahl, z. B. den der gebrochnen Zahl B nach dem Gesetze eines Products, was folgende Factoren besitzt:

1) Diejenigen, welche der Nenner von B gar nicht hat, die aber in den Nennern der übrigen gebrochnen Zahlen angetroffen werden, und zwar so viele hiervon, als der Nenner besitzt, der davon die gröfste Anzahl hat.

2) So viele von den Factoren, welche der Nenner von B schon besitzt, als der Nenner eine gröfsere Anzahl davon hat, in welchem ihrer die mehrsten angetroffen werden.

Beweis.

Die Nenner der erhaltenen gebrochnen Zahlen sind alle unter sich gleich, weil nach dem vorgeschriebenen Verfahren in einem die Factoren anzutreffen sind, die man in den übrigen antrifft. Die gebrochnen Zahlen sind unverändert geblieben, weil Zähler und Nenner einer jeden nach dem Gesetze der nämlichen Zahl multiplicirt wurden. — Sie haben aber auch unter sich die kleinste Benennung; denn sollte dies nicht der Fall seyn, so müfsten die Zähler der erhaltenen gebrochnen Zahlen und der gemeinschaftliche Nenner wenigstens einen Factor mit einander gemein haben. Der Zähler einer jeden der gegebenen gebrochnen Zahlen hatte aber mit dem ihm zugehörigen Nenner keinen Factor gemein, weil sie die einfachste Form hatten. Die Zähler der gleichnamigen gebrochnen Zahlen können daher auch nur die Factoren mit dem gemeinschaftlichen Nenner gemein haben, nach deren Gesetze die Nenner der gegebenen multiplicirt werden mufsten, damit sie einerlei Nenner erhielten. Der Nenner von B wurde aber nicht nach dem Gesetze der Factoren multiplicirt, die er ausschliefslich besafs, folglich auch der Zähler nicht, also können auch dem neuen Zähler von B diese Factoren nicht mit dem gemeinschaftlichen Nenner und

mit

mit den Zählern der übrigen gebrochnen Zahlen gemein seyn. Hatte der Nenner von der gegebenen gebrochnen Zahl C die gröſste Anzahl von den Factoren, die in einigen oder allen Nennern der übrigen gebrochnen Zahlen angetroffen wurden, so wurde er, also auch sein Zähler, nicht nach dem Gesetze dieser Factoren multiplicirt, folglich kann er auch diese Factoren nicht mit den Zählern der übrigen gebrochnen Zahlen und dem gemeinschaftlichen Nenner gemein besitzen. Es ist also nicht möglich, daſs die Zähler der erhaltenen gebrochnen Zahlen und der gemeinschaftliche Nenner einen Factor mit einander gemein haben können.

Beispiel.

Es sollen folgende gebrochne Zahlen unter einerlei Benennung gebracht werden:

$$\frac{3}{16},\ \frac{5}{12},\ \frac{13}{20},\ \frac{7}{18}$$

Nun ist 16 = 2 . 2 . 2 . 2
12 = 2 . 2 . 3
20 = 2 . 2 . 5
18 = 2 . 3 . 3

Also 16 wird multiplicirt nach dem Gesetze von 3 . 3 . 5
ferner 12 - - - - - - 2 . 2 . 5 . 3
ferner 20 - - - - - - 2 . 2 . 3 . 3
und 18 - - - - - - 2 . 2 . 2 . 5

Folglich erhält man folgende gebrochne Zahlen:

$$\frac{135}{720},\ \frac{300}{720},\ \frac{468}{720},\ \frac{280}{720}.$$

§. 55.

1. Zusatz.

Die Richtigkeit der Behauptung des §. 54., daſs nach seinem vorgeschriebenen Verfahren die gebrochnen Zahlen, deren Nenner unter sich zusammengesetzt sind, nicht nur eine gemeinschaftliche, sondern auch die kleinste gemeinschaftliche Benennung erhalten, gründet sich auf die Voraussetzung, daſs die gegebenen gebrochnen Zahlen alle die einfachste Form haben. Haben sie aber diese nicht, so findet jene Vorschrift zur

Erreichung des kleinſten gemeinſchaftlichen Nenners in folgenden Fällen keine Anwendung:

1) Wenn ſich ſchon die gegebenen gebrochnen Zahlen in dem Zuſtande befinden, daſs ſie ſich durch eine und die nämliche Zahl gemeinſchaftlich aufheben laſſen. Denn wenn ſie nach §. 54. unter einerlei Benennung gebracht ſind, ſo haben ihre Zähler und der gemeinſchaftliche Nenner noch dieſen Factor mit einander gemein.

2) Wenn die Zahl, wodurch ſich eine oder mehrere der gegebenen gebrochnen Zahlen aufheben laſſen, ſich als Factor in keinem der Nenner der gebrochnen Zahlen befindet, die dadurch nicht aufgehoben werden können. Denn iſt z. B. p eine Zahl, wodurch ſich die gebrochne Zahl B aufheben läſst, und p befindet ſich nicht in den Nennern der übrigen gebrochnen Zahlen, ſo müſſen die Nenner, worin ſie ſich nicht befindet, alſo auch die dazu gehörigen Zähler nach dem Geſetze von p multiplicirt werden. Alsdenn iſt p offenbar in allen Zählern und in dem gemeinſchaftlichen Nenner befindlich, folglich haben die Zähler und der gemeinſchaftliche Nenner den Factor p mit einander gemein. Iſt unter den gegebenen gebrochnen Zahlen noch eine oder ſind noch mehrere darunter, die ſich durch q aufheben laſſen, und q befindet ſich auch nur als Factor in den Nennern dieſer gebrochnen Zahlen, ſo werden die Zähler und der gemeinſchaftliche Nenner der erhaltenen, auch noch für q, alſo für pq theilbar ſeyn, und ſo erhellet im allgemeinen, daſs die Zähler und Nenner der gebrochnen ~~Zahlen, die~~ man aus den gegebenen nach §. 54. erhalten hat, allemal für ein Product von Zahlen theilbar ſind, die ſich bloſs in den Nennern von den gebrochnen Zahlen als Factoren befinden, die ſich dadurch aufheben laſſen.

3) Eben ſo läſst ſich leicht zeigen, daſs wenn ſich mehrere oder auch nur eine der gegebenen gebrochnen Zahlen, z. B. B durch p aufheben läſst, und p ſich auch als Factor noch in den Nennern von gebrochnen Zahlen befindet, die ſich nicht dadurch aufheben laſſen, aber nicht

so oft als in dem Nenner von B, dass alsdenn die gebrochnen Zahlen, die man aus ihnen nach §. 54. erhält, gemeinschaftlich durch p aufzuheben sind.

2. Zusatz.

Wenn daher mehrere gebrochne Zahlen gegeben sind, bei welchen die angeführten drei Fälle Statt finden, so können sie nur nach der Vorschrift des §. 54. die kleinste gemeinschaftliche Benennung erhalten, wenn man vorher den gebrochnen Zahlen, die sich aufheben lassen, die einfachste Form gegeben hat.

Addition gebrochner Zahlen.

§. 56.

1. Aufgabe.

Mehrere gebrochne Zahlen von einerlei Benennung zu einander zu addiren.

Auflösung.

Wenn die Summe mehrerer gebrochner Zahlen bestimmt werden soll, so heisst dies: es soll der relative Werth der Summe mehrerer Brüche, die sich auf ein und das nämliche Ganze beziehn, in Rücksicht auf dieses Ganze angegeben werden. Dieses geschieht offenbar durch eine gebrochne Zahl, deren Zähler sagt, wie oft der Maasstab, wodurch man die Brüche und das Ganze maass, in allen Brüchen überhaupt enthalten ist, und deren Nenner bestimmt, wie oft das Ganze diesen gemeinschaftlichen Maasstab in sich begreift. Die Summe ist also eine gebrochne Zahl, deren Zähler die Summe der gegebenen gebrochnen Zahlen ist, und deren Nenner mit dem gemeinschaftlichen Nenner jener Zahlen übereinstimmt.

1. Zusatz.

Sollen Zahlen mit verschiedenen Nennern addirt werden, so bringt man sie unter einerlei Benennung, und verfährt mit ihnen nach der vorhin gegebenen Vorschrift.

2. Zusatz.

Die Summe mehrerer gebrochnen Zahlen kann einen Zähler haben, der mit dem Nenner übereinstimmt, sie kann also

gleich $\frac{n}{n}$ seyn. Fährt man mit der Addition fort, so kann aus $\frac{n}{n}$ endlich der Ausdruck $\frac{gn}{n}$ werden, so dass die Summe der gebrochnen Zahlen, als eine Summe von g gebrochnen Zahlen angesehn werden kann, deren eine jede gleich $\frac{n}{n}$, also gleich 1 ist, folglich würde $\frac{gn}{n}$ mit g einerlei seyn.

3. Zusatz.

Es kann eine jede ganze Zahl g in eine gebrochne mit beliebigem Nenner n verwandelt werden, ohne dass sie ihren Werth verändert, wenn man sie nach dem Gesetze von n multiplicirt, dieses Product zum Zähler und n zum Nenner macht.

4. Zusatz.

Eine ganze Zahl kann zu einer gebrochnen addirt werden, wenn man ihr die Form einer gebrochnen Zahl gibt, welche mit der gegebenen einerlei Nenner hat. Es ist also $g + \frac{m}{n} = \frac{gn}{n} + \frac{m}{n} = \frac{gn+m}{n}$.

5. Zusatz.

Man verwandelt eine vermischte Zahl in eine uneigentlich gebrochne, wenn man die ganze Zahl nach dem Gesetze des Nenners der gebrochnen multiplicirt, den Zähler derselben zu diesem Producte addirt, und diese Summe als einen Zähler, und den Nenner der gebrochnen Zahl als den dazugehörigen Nenner ansieht. Und hieraus folgt wieder, dass man eine uneigentlich gebrochne in eine vermischte Zahl verwandelt, wenn man den Zähler nach dem Gesetze des Nenners dividirt.

Subtraction gebrochner Zahlen.

§. 57.

Aufgabe.

Von einer gebrochnen Zahl eine andere gleichnamige zu subtrahiren.

Auflösung.

Die zuverringernde muss als eine Summe der subtrahirenden und einer dritten unbekannten angesehn werden, die mit ihr einerlei Nenner hat. Diese unbekannte ist die Differenz, deren Nenner man also schon kennt. Da die zuverringernde aber die Summe der subtrahirenden und der Differenz ist, so muss auch ihr Zähler die Summe des Zählers der subtrahirenden und des Zählers der Differenz seyn, folglich findet man diesen, wenn man von dem Zähler der zuverringernden, den Zähler der subtrahirenden gebrochnen Zahl subtrahirt.

Beispiel.

Die Differenz der $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{7}$ ist gleich $\frac{2}{7}$.

1. Zusatz.

Wenn gebrochne Zahlen mit verschiedenen Nennern von einander subtrahirt werden sollen, so müssen sie unter einerlei Benennung gebracht werden.

2. Zusatz.

Da eine ganze Zahl zu einer gebrochnen addirt werden kann, so ist auch die Subtraction einer gebrochnen Zahl von einer ganzen und einer ganzen Zahl von einer gebrochnen möglich, wenn man nur die ganze Zahl in eine ihr gleichgültige gebrochne verwandelt, die mit den gegebenen gebrochnen Zahlen einerlei Nenner hat. Die Frage, welche hier entsteht, wie man es sich erklären soll, dass eine ganze Zahl mit einer gebrochnen vereinigt, eine gebrochne geben kann, weil dies doch muss vorausgesetzt werden, wenn man eine ganze Zahl von einer gebrochnen subtrahiren soll, kann leicht durch §. 20. beantwortet werden.

1. *Beispiel.*

$$8 - \frac{3}{4} = \frac{32}{4} - \frac{3}{4} = \frac{29}{4} = 7\tfrac{1}{4}.$$

2. *Beispiel.*

$$\frac{5}{7} - 3 = \frac{5}{7} - \frac{21}{7} = - \frac{16}{7}.$$

Multiplication gebrochner Zahlen.

§. 58.

Aufgabe.

Eine gebrochne Zahl $\frac{Z}{N}$ nach dem Gesetze einer ganzen Zahl G zu multipliciren.

Auflösung.

Die Form von G in Rücksicht auf 1 wird dadurch bestimmt, dass G eine Summe von G Einheiten ist, folglich muss auch das Product eine Summe von G gebrochnen Zahlen seyn, deren eine jede gleich $\frac{Z}{N}$ ist, oder es ist das Product gleich $\frac{ZG}{N}$. (§. 56.)

Zusatz.

Es ist $\frac{ZG}{N} = \frac{ZG:G}{N:G} = \frac{Z}{N:G}$. (§. 48. Lehrs.) Man multiplicirt also eine gebrochne Zahl nach dem Gesetze einer ganzen, wenn man entweder den Zähler nach dem Gesetze der ganzen Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert lässt, oder wenn man den Nenner nach dem Gesetze der ganzen Zahl dividirt und den Zähler unverändert lässt.

1. *Beispiel.*

$$\frac{3}{20} \cdot 7 = \frac{21}{20} = 1\tfrac{1}{20}.$$

2. *Bei-*

2. *Beispiel.*

$$\frac{7}{20} \cdot 5 = \frac{7}{20:5} = \frac{7}{4} = 1\tfrac{3}{4}.$$

§. 59.

Aufgabe.

Eine gebrochne Zahl $\frac{Z}{N}$ nach dem Gesetze einer andern $\frac{z}{n}$ zu multipliciren.

Auflösung.

Die Form, welche die gebrochne Zahl $\frac{z}{n}$ in Rücksicht auf die Einheit hat, ist die, dass sie n mal gedacht gleich einer Summe von z Einheiten wird; folglich muss auch das Product, n mal gedacht, gleich einer Summe von z gebrochnen Zahlen werden, deren eine jede gleich $\frac{Z}{N}$ ist, oder es ist das verlangte Product gleich $\frac{Zz}{Nn}$, weil $\frac{Zzn}{Nn} = \frac{Zz}{N}$ ist.

Zusatz.

Es ist $\frac{Zz}{Nn} = \frac{Zz:z}{Nn:z} = \frac{Zz:z:n}{Nn:z:n} = \frac{Z:n}{N:z}$. Man multiplicirt also eine gebrochne Zahl nach dem Gesetze einer andern, wenn man entweder die Zähler und Nenner unter sich multiplicirt, oder wenn man den Zähler des Multiplicands, nach dem Gesetze des Nenners des Multiplicators, und den Nenner des Multiplicands nach dem Gesetze des Zählers des Multiplicators, dividirt

1. *Beispiel.*

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

Auflöſung.

Der Diviſor $\frac{z}{n}$ iſt, n mal gedacht, gleich einer Summe von z Einheiten. Es muſs daher auch das Dividend $\frac{Z}{N}$, n mal gedacht, eine Summe von z Zahlen ſeyn, deren eine jede gleich dem Quotienten iſt, oder welches einerlei iſt, es muſs der Quotient, z mal gedacht, gleich $\frac{Zn}{N}$ ſeyn. Folglich iſt der verlangte Quotient gleich $\frac{Zn}{Nz}$.

Zuſatz.

Es iſt $\frac{Zn}{Nz} = \frac{Zn:z}{Nz:z} = \frac{Zn:z:n}{Nz:z:n} = \frac{Z:z}{N:n}$. Es wird daher eine gebrochne Zahl nach dem Geſetze einer andern dividirt, wenn man entweder den Zähler des Dividends nach dem Geſetze des Nenners des Diviſors, und den Nenner des Dividends nach dem Geſetze des Zählers des Diviſors multiplicirt, oder wenn man den Zähler des Dividends nach dem Geſetze des Zählers des Diviſors, und den Nenner des Dividends nach dem Geſetze des Nenners des Diviſors dividirt.

1. Beiſpiel.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20} = 1\tfrac{1}{20}.$$

2. Beiſpiel.

$$\frac{9}{14} : \frac{3}{7} = \frac{9:3}{14:7} = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Sechstes Kapitel.

Von den zehntheiligen und sechzigtheiligen gebrochnen Zahlen.

1. Von den zehntheiligen gebrochnen Zahlen.

§. 63.

Erklärung.

Wenn man in einer Zahl von der Ziffer einer gewissen Ordnung von der Linken nach der Rechten fortgeht, und nicht bei den Einern stehn bleibt, sondern noch über diese fortschreitet, ihr also Ziffern folgen läst, zwischen welchen ebenfalls das Gesetz des decadischen Systems statt findet, so muss die Ziffer, welche zunächst auf die Einer folgt, Zehntel, die hierauf folgt, Hundertel u. s. w. enthalten, sie müssen also Zähler von gebrochnen Zahlen seyn, deren Nenner gleich 10, oder ein Product der 10 nach dem Gesetze von 10, oder nach dem Gesetze von 10. 10, oder von 10. 10. 10 u. s. w. ist. Solche gebrochne Zahlen werden decimaltheilige gebrochne Zahlen, oder kürzer Decimalbrüche genannt.

1. Willkührlicher Satz.

Rechnet man die Stellen dieser Decimalbrüche von der Linken nach der Rechten, und nennt die Stelle, welche zunächst auf die Stelle der Einer folgt, die erste, so stehn die Zehntel in der ersten, die Hundertel in der zweiten, die Tausendtel in der dritten u. s. w. Hiernach mögen die Zehntel Decimalbrüche der ersten Ordnung, die Hundertel Decimalbrüche der zweiten Ordnung heissen u. s. w.

1. Zusatz.

Man kann also aus der Stelle, welche ein Decimalbruch in Rücksicht auf die Stelle der Einer einnimmt, beurtheilen, von welcher Ordnung er ist, und kennt man diese, so weiss man

man auch ſeinen Nenner. Um alſo den Werth eines Decimalbruchs anzuzeigen, hat man nur nöthig, ſeinen Zähler in die Stelle zu ſetzen, die ihm nach ſeiner Ordnung zukömmt, und damit er dieſe Stelle erhalten kann, ſo braucht man nur die Stelle, in welcher ein Decimalbruch nach einer gewiſſen Ordnung fehlt, mit einer Null auszufüllen, und zwiſchen die Stelle, in welcher die Ziffer der Einer ſteht, und zwiſchen die der Zehntel ein Komma oder einen Punkt zu ſetzen. Sollten die Einer fehlen, ſo füllt man auch ihre Stelle mit o aus. Hiernach hieſse 3,456 durch Worte ausgedrückt: drei Ganze, vier Zehntel, fünf Hundertel und ſechs Tauſendtel. Und wollte man $\frac{7}{1000}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{5}{10000}$ auf vorgeſchriebene Weiſe über einander ſetzen, ſo erhielte man die Zahl 0,8075.

2. *Willkührlicher Satz.*

Eine Zahl, worin Decimalbrüche vorkommen, will ich eine decimaltheilige Zahl, und eine jede ihrer Ziffern, die einen Decimalbruch anzeigt, eine Decimalziffer nennen.

1. *Zuſatz.*

1) Es iſt 0,345 mit 000,345 einerlei, weil die Ziffern dieſer Zahl die Stelle beſitzen, die ſie in jener Zahl haben.

2) Es iſt auch 0,345000 mit 0,345 gleichgültig, weil die Ziffern beider Zahlen einerlei Stellen haben.

Es bleibt daher eine decimaltheilige Zahl unverändert, wenn man vor ihre höchſte Ziffer der ganzen Zahl mehrere Nullen ſetzt, oder wenn man an ihre geringſte Decimalziffer mehrere Nullen hängt.

2. *Zuſatz.*

In der Zahl 345,67 ſteht eine jede Ziffer um 3 Stellen weiter zur Linken, als in 0,34567, folglich hat eine jede Ziffer jener Zahl einen tauſendmal ſo groſsen Werth, als eine Ziffer dieſer Zahl hat. Man multiplicirt alſo eine decimaltheilige Zahl nach dem Geſetze der Einheit von der m^ten^ Ordnung, wenn man das Komma m Stellen weiter nach der Rechten ſetzt, und eine decimaltheilige Zahl wird nach dem Geſetze der Einheit von der m^ten^ Ordnung dividirt, wenn man das Komma m Stellen weiter nach der Linken ſetzt.

Es ist also 0,345 × 1000000 gleich 345000 und 0,345 : 100 = 0,00345.

3. Zusatz.

58634 : 1000 = 58,634. Man dividirt daher eine ganze Zahl nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung, wenn man in ihr von der Rechten nach der Linken m Stellen abschneidet.

§. 64.

Aufgabe.

Eine gegebene gebrochne Zahl $\frac{Z}{N}$ in eine ihr gleichgültige decimaltheilige Zahl zu verwandeln.

Auflösung.

Man hänge Z mehrere Nullen an, dividire die dadurch entstandene Zahl nach dem Gesetze von N, und schneide im Quotienten von der Rechten nach der Linken so viele Stellen ab, als an Z Nullen gehängt sind.

Beweis.

Wenn man dem Zähler m Nullen anhängt, so wird $\frac{Z}{N}$ dadurch so vielmal grösser, als Z durch die Multiplication nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung vergrössert wird, folglich ist auch der erhaltene Quotient so vielmal grösser als $\frac{Z}{N}$, und daher muss er nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung dividirt werden, oder welches einerlei ist, man muss in ihm von der Rechten nach der Linken m Stellen abschneiden, wenn er gleich $\frac{Z}{N}$ werden soll. (§. 63. 3. Zus.) Ist aber dieses geschehn, so hat man eine decimaltheilige Zahl, die mit $\frac{Z}{N}$ gleichgültig ist.

Beiſpiele.

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} = 0,3333$ - - - -
$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,2$
$\frac{1}{6} = 0,1666$ - - - -	$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857$ - - -
$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{9} = 0,1111111111$ - - - -
$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{1}{11} = 0,090909$ - - - -
$\frac{1}{24} = 0,041666$ - - -	$\frac{1}{288} = 0,003472222$ - - -

Zuſatz.

Aus dieſen Beiſpielen ſieht man, daſs ſich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ in Decimalbrüchen ganz darſtellen laſſen, daſs dieſes aber nicht bei $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{288}$ möglich ſey. Es laſſen ſich alſo einige gebrochne Zahlen genau in Decimalbrüchen angeben, andere aber nicht. Man ſieht aber ein, daſs man ſich bei denen, bei welchen dies nicht möglich iſt, dem wahren Werthe der zu verwandelnden gebrochnen Zahl immer mehr nähern kann. Wie weit man ſich ihm nähern müſſe, läſst ſich im allgemeinen nicht ſagen, dies hängt von der Natur einer jeden Aufgabe ab, nachdem ihre Auflöſung eine gröſsere oder geringere Genauigkeit in der Darſtellung der gegebenen gebrochnen Zahl verlangt.

Addition der Decimalbrüche.

§. 65.

Aufgabe.

Mehrere decimaltheilige Zahlen zu einander zu addiren.

Auflöſung.

Man ſetze ſie ſo unter einander, daſs die Stellen der Einer unter einander ſtehn, und addire ſie alsdenn wie ganze Zahlen, und gebe den Ziffern der Summe die Ordnung, welche die darüberſtehenden der ſummirenden Zahlen haben.

Beweis.

Die Richtigkeit dieſes Verfahrens beruht auf eben den Sätzen, worauf ſich die Richtigkeit der gegebenen Regeln für die Addition ganzer Zahlen in §. 30. ſtützt.

Bei-

Beispiel.

Es sind gegeben 0.340567, 8.09357 und 6.5472

	0.340567
	8.09357
	6.5472
Summe	14.981337

1. Zusatz.

Wenn man eine oder mehrere gebrochne Zahlen von der Form $\frac{Z}{N}$ zu einer oder mehrern decimaltheiligen Zahlen addiren will, so braucht man nur die gegebenen gebrochnen Zahlen in decimaltheilige zu verwandeln, und sie in dieser Form zu den gegebenen decimaltheiligen Zahlen nach der eben gegebenen Regel zu addiren.

Beispiel.

Die gegebenen Zahlen sind: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, 0.34567, 8.03021. Nun ist $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ (§. 64.).

also	0,5
	0,25
	0,2
	0,34567
	8,03021
Die Summe	9,32588

2. Zusatz.

Um eine oder mehrere ganze Zahlen zu einer oder mehrern decimaltheiligen Zahlen zu addiren, setzt man sie so untereinander, daſs die Ziffern der Einer unter einander stehn, und addirt sie in dieser Stellung nach der vorigen Regel.

Beispiel.

Es sollen folgende Zahlen addirt werden: 345, 678, 0.9345, 7.8003.

	0.9345
	7.8003
	678
	345
Summe	1031.7348

Subtraction der Decimalbrüche.

§. 66.

Aufgabe.

Von einer grössern decimaltheiligen Zahl eine kleinere zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setze die subtrahirende so unter die zuverringernde, dass die Stellen der Einer unter einander stehn, und subtrahire nun die untere von der obern, wie es die Subtraction ganzer Zahlen verlangt, und gebe einer jeden Ziffer der Differenz die Ordnung, welche der über ihr stehenden Stelle der zuverringernden Zahl zukömmt.

Beweis.

Die Richtigkeit dieser Vorschrift beruht auf eben den Gründen, worauf sich die Regeln stützen, die in §. 33. für die Subtraction ganzer Zahlen gegeben sind.

Beispiel.

Es sey die zuverringernde = 5.034786
und die subtrahirende = 3.57029

	5.034786
-	3.57029
Die Differenz	1.464496.

1. Zusatz.

Wenn eine gegebene gebrochne Zahl von der Form $\frac{Z}{N}$ von einer grössern decimaltheiligen Zahl subtrahirt werden soll, so

so wird $\frac{Z'}{N}$ in eine decimaltheilige verwandelt und nun nach der eben vorgeschriebenen Regel von der gegebenen decimaltheiligen subtrahirt.

2. *Zusatz.*

Wenn eine kleinere ganze Zahl von einer grössern decimaltheiligen subtrahirt werden soll, so subtrahirt man die gegebene subtrahirende ganze Zahl von der ganzen Zahl der decimaltheiligen, und lässt die Decimalziffern unverändert.

Beispiel.

Die ganze Zahl 5 gibt, von 8.043215 subtrahirt, die Differenz 3.043215.

3. *Zusatz.*

Wenn eine kleinere decimaltheilige Zahl von einer grössern ganzen subtrahirt werden soll, so hängt man der ganzen Zahl so viele Nullen an, als die decimaltheilige Zahl Decimalziffern hat, und setzt die subtrahirende so darunter, dass ihre geringste Decimalziffer unter der ersten Null zur Rechten steht, und subtrahirt sie dann von der darüberstehenden nach den gewöhnlichen Regeln der Subtraction. Eine jede Ziffer der Differenz ist alsdenn von der Ordnung, von welcher die darüberstehende Ziffer der subtrahirenden Zahl ist.

1. *Beispiel.*

Es soll 7.03546 von der ganzen Zahl 16 subtrahirt werden.

	16.00000
	7.03546
Die Differenz	8.96454

2. *Beispiel.*

Die zuverringernde Zahl sey 312, und die subtrahirende sey 0.569328.

312.000000
0.569328
311.430672.

Multiplication der Decimalbrüche.

§. 67.

Aufgabe.

Eine decimaltheilige Zahl mit m Decimalziffern nach dem Gesetze einer andern zu multipliciren, die n Decimalziffern hat.

Auflösung.

Man multiplicire das Multiplicand nach dem Gesetze des Multiplicators, als hätte man mit ganzen Zahlen zu thun, schneide aber im Producte von der Rechten nach der Linken m + n Decimalstellen ab.

Beweis.

Sieht man die gegebenen Zahlen als ganze an, so denkt man sich die mit m Decimalziffern, nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung, und die mit n Decimalziffern nach dem Gesetze der Einheit von der n^{ten} Ordnung, multiplicirt, folglich enthält auch ihr Product P folgende zwei Factoren:

1) Das gesuchte Product der beiden gegebenen decimaltheiligen Zahlen.

2) Das Product der Einheit von der m^{ten} Ordnung nach dem Gesetze der Einheit von der n^{ten} Ordnung.

Will man also aus P das gesuchte Product erhalten, so muss man P nach dem Gesetze des zweiten Factors dividiren. Der zweite Factor ist aber eine Einheit von der $m+n^{ten}$ Ordnung (§. 35. 2. Zus.), folglich muss auch P nach dem Gesetze der Einheit von der $m+n^{ten}$ Ordnung dividirt, oder es müssen in P von der Rechten nach der Linken m + n Stellen abgeschnitten werden. (§. 63. 3. Zus.)

Beispiel.

Es sey das Multiplicand = 3.0456
und der Multiplicator = 4.532

```
      30,456
       4532
    --------
      60912
     91368
    152280
   121824
   ---------
Product 138026592
```

Da nun in dem Multiplicande vier und im Multiplicator drei Decimalstellen sind, so müssen im Producte von der Rechten nach der Linken 7 Stellen abgeschnitten werden. Folglich ist das gesuchte Product gleich 13,8026592.

1. Zusatz.

Wenn eine ganze Zahl nach dem Gesetze einer decimaltheiligen multiplicirt werden soll, so verfährt man mit den beiden gegebenen Zahlen, als wenn sie beide ganze Zahlen wären, schneidet aber im Producte von der Rechten nach der Linken so viele Stellen ab, als sich in der decimaltheiligen Zahl Decimalstellen befinden.

Beispiel.

Es soll 3,04567 nach dem Gesetze der Zahl 321 multiplicirt werden.

```
   304567
      321
  --------
   304567
  609134
 913701
 ---------
 97766007
```

In dem Multiplicande sind aber 5 Decimalstellen, folglich ist das gesuchte Product gleich 977,66007.

2. Zusatz.

Entwickelt man zwei gebrochne Zahlen von der Form $\frac{Z}{N}$ in Decimalbrüche, und sucht hierauf ihr Product, so läßt sich dieses nicht genau finden, wenn einer oder beide Factoren eine ohne Ende fortlaufende Reihe von Decimalziffern enthalten.

 Man

Man darf daher auch nur die Ziffern ihres Products als richtig ansehn, auf welche die weggelassenen Ziffern der Factoren bei der Multiplication keinen Einfluß haben konnten.

Division der Decimalbrüche.

§. 68.

Aufgabe.

Eine grössere decimalstellige Zahl nach dem Gesetze einer kleinern zu dividiren, welche weniger Decimalstellen als das Dividend hat.

Auflösung.

Man sehe sie bei der Division als ganze Zahlen an, schneide aber im Quotienten so viele Stellen ab, als das Dividend eine grössere Anzahl Decimalstellen als der Divisor besitzt.

Beweis.

Es sey das Dividend gleich D, der Divisor gleich d und der Quotient gleich Q, so ist nach §. 27. 1. Zus. D = dQ. Die einzelnen Ziffern von D erhält man aber, wenn man d und Q bei der Multiplication nur als ganze Zahlen ansieht (§. 67.), folglich muß man auch bei der Division die einzelnen Ziffern von Q erhalten, wenn man D und d als ganze Zahlen ansieht. Es kömmt also nur noch darauf an, wie viele Decimalstellen Q haben müsse. Es folgt aber aus D = dQ, daß die Anzahl der Decimalstellen des Dividends gleich der Summe der Anzahl der Decimalstellen des Divisors und des Quotienten sey. (§. 67.) Hat also das Dividend m, der Divisor r und der Quotient x Decimalstellen, so ist x + r = m, also x = m − r, oder es kommen dem Q. m − r Decimalstellen zu.

Beispiel.

Das Dividend sey = 0.2750

Der Divisor sey = 0.125

Nun ist 2750 : 125 = 22, folglich da das Dividend eine Decimalstelle mehr hat, als der Divisor, so ist der Quotient gleich 2.2.

1. *Zusatz.*

Sollte das Dividend kleiner seyn, als der Divisor, aber doch mehrere Decimalstellen haben, als der Divisor hat; so gilt hier ebenfalls die vorhin gegebene Regel.

Beispiel.

Es sey das Dividend = 0,0272
der Divisor = 0,16
so ist 272 : 16 = 17, also 0,0272 : 0,16 = 0,17.

2. *Zusatz.*

Wenn das Dividend und der Divisor eine gleiche Anzahl Decimalstellen haben, so hat der Quotient gar keine.

Beispiel.

Es ist 2.72 : 0.16 = 17.

3. *Zusatz.*

Wenn der Divisor eine gröſsere Anzahl Decimalstellen hat, als das Dividend, so wird m — n negativ, um daher dieses zu vermeiden, ist es nothwendig, daſs man dem Dividende wenigstens so viele Nullen anhängt, als der Divisor mehrere Decimalstellen hat, als er. Denn hierdurch wird das Dividend nicht verändert (§. 63. 2. willk. S. 1. Zus.), und m — n bleibt nicht mehr negativ.

1. *Beispiel.*

0.24 : 0.0006 = 0.2400 : 0.0006 = 400.

2. *Beispiel.*

0.72 : 0.0009 = 0.720000 : 0.0009 = 800.

4. *Zusatz.*

Sollte bei der Division ein Rest übrig bleiben, so kann man dem Dividende noch p Nullen anhängen und die Division fortsetzen, man muſs aber in diesem Falle zu der Anzahl der Decimalstellen des Dividends noch p Stellen rechnen.

Beispiel.

Wenn 0.25 nach dem Gesetze von 0.4 dividirt wird, so bleibt der Rest 1, man hänge daher der Zahl 0.25 noch zwei Nullen an, so erhält man 2500 : 4 = 625, folglich ist 0.2500 : 0.4 = 0.625, oder welches einerlei ist, 0.25 : 0.4 = 0.625.

5. *Zusatz.*

Wenn eine decimaltheilige Zahl nach dem Gesetze einer ganzen dividirt werden soll, so verfährt man bei der Division, als wenn sie beide ganze Zahlen wären, schneidet aber im Quotienten von der Rechten nach der Linken so viele Stellen ab, als die decimaltheilige Zahl Decimalstellen besitzt.

Beispiel.

0,0024 : 6 = 0,0004.

6. *Zusatz.*

Wenn eine grössere ganze Zahl nach dem Gesetze einer kleinern decimaltheiligen dividirt werden soll, so hänge man ihr entweder so viele Nullen an, als der Divisor Decimalstellen hat, oder man füge zu ihr eine noch grössere Anzahl Nullen, und verfahre dann bei der Division, als wenn man mit ganzen Zahlen zu thun hätte. Im erstern Falle ist der Quotient eine ganze Zahl, im zweiten Falle müssen aber im Quotienten so viele Stellen abgeschnitten werden, als dem Dividende mehrere Nullen angehängt sind, als der Divisor Decimalstellen besitzt.

1. *Beispiel.*

24 : 0,5 = 24,0 : 0,5 = 48.

2. *Beispiel.*

9 : 2.0345 = 9.0000000 : 2.0345 = 4.428.

7. *Zusatz.*

Soll eine kleinere ganze Zahl nach dem Gesetze einer grössern decimaltheiligen dividirt werden, so hängt man der ganzen Zahl so viele Nullen an, dass die Division verrichtet werden kann, und schneidet im erhaltenen Quotienten so viele Stellen ab, als dem Dividende mehrere Nullen angehängt wurden, als der Divisor Decimalstellen hatte.

Beispiel.

6 : 9,5 = 6,00000 : 9,5 = 0,6315.

---

2. Von

2. Von den sechzigtheiligen gebrochnen Zahlen.

§. 69.

Erklärung.

Gebrochne Zahlen, deren Nenner gleich 60 oder gleich 60.60 oder gleich 60.60.60 u. s. w. sind, werden **sechzigtheilige** gebrochne Zahlen, oder schlechtweg **sechzigtheilige Brüche** oder **Sexagesimalbrüche** genannt. So ist z. B. eine Minute ein sechzigtheiliger Bruch in Hinsicht auf einen Grad.

1. Willkührlicher Satz.

Die sechzigtheiligen Brüche werden so angezeigt, dass man nur ihre Zähler hinschreibt und diesen oben zur Rechten eine römische Ziffer gibt, die so viele Einheiten enthält, als ihr Nenner den Factor 60 in sich begreift. Es ist also $40' = \frac{40}{60}$, $13'' = \frac{13}{60.60} = \frac{13}{3600}$ u. s. w. Die römische Ziffer wird **Kennziffer** genannt, ist sie gleich ′, so enthält die Zahl, der sie angehängt ist, Minuten, ist sie gleich ″, so bedeutet die Zahl, der sie zukömmt, Secunden u. s. f. Tertien, Quarten u. s. w.

Zusatz.

Besteht eine Zahl aus mehrern sechzigtheiligen Brüchen, so ordnet man diese so, dass die mit den grössern Kennziffern, denen mit den kleinern Kennziffern von der Linken nach der Rechten folgen; so wäre zum Beispiel $\frac{26}{60} + \frac{39}{60.60} + \frac{50}{60.60.60} = 26'\ 39''\ 50'''$. Da nun eine Zahl dadurch nicht verändert wird, wenn man vor sie eine 0 setzt, und der Zähler eines Sexagesimalbruchs höchstens zwei Stellen einnehmen kann, so kann man $\frac{7}{60} + \frac{50}{60.60.60} + \frac{7}{60.60.60.60}$ so schreiben: $7'\ 00''\ 50'''\ 07''''$.

2. *Willkührlicher Satz.*

Eine solche Zahl, wie 9 07′ 00″ 50‴ 07⁗, will ich eine sechzigtheilige Zahl oder eine Sexagesimalzahl nennen, und die Stelle, welche dem Zähler eines sechzigtheiligen Bruchs in ihr zukömmt, eine Sexagesimalstelle heissen. Es machen also 60 Einheiten in einer Stelle, eine Einheit in der nächst vorhergehenden Stelle zur Linken.

§. 70.

Aufgabe.

Eine ganze Zahl in einen ihr gleichgültigen sechzigtheiligen Bruch mit der Kennziffer M zu verwandeln.

Auflösung.

Man multiplicire die ganze Zahl nach dem Gesetze eines Products, was aus m Factoren besteht, deren ein jeder gleich 60 ist, und gebe der dadurch entstandenen Zahl die Kennziffer M.

Beweis.

Die Kennziffer M zeigt an, dass man sich die Zahl, welche durch die Multiplication aus der ganzen erhalten wurde, als einen Zähler denken soll, der das Product zum Nenner hat, nach dessen Gesetze die ganze Zahl multiplicirt wurde, folglich ist die erhaltene Zahl mit der Kennziffer M, gleich der gegebenen ganzen.

Beispiel.

Die ganze Zahl 5 ist gleich (5 . 60 . 60)″ = 18000″.

§. 71.

Aufgabe.

Eine gebrochne Zahl $\frac{Z}{N}$ in einen sechzigtheiligen Bruch zu verwandeln, der die Kennziffer M hat.

Auflösung.

Man multiplicire Z so oft nach dem Gesetze von 60, als M Einheiten enthält, dividire dieses Product nach dem Gesetze von N, und gebe dem Quotienten die Kennziffer M.

Be-

Beweis.

Die gebrochne Zahl wird hier als ein Quotient angesehn (37. 4. Zus.), und dieser wird durch das vorgeschriebene Verfahren nicht verändert, weil er dadurch, daſs er die Kennziffer M erhält, nach dem Gesetze der nämlichen Zahl dividirt wird, nach deren Gesetze er vorher multiplicirt wurde.

Beispiel.

$$\frac{3}{5} = \frac{3.60.60}{5.60.60} = \frac{10800}{5.60.60} = \frac{2160}{60.60} = 2160''.$$

§. 72.

Aufgabe.

Einen sechzigtheiligen Bruch mit der Kennziffer N, in einen andern ihm gleichgültigen mit der Kennziffer N + M, zu verwandeln.

Auflösung.

Man multiplicire seinen Zähler nach dem Gesetze eines Products, was m Factoren enthält, deren ein jeder gleich 60 ist, und gebe dem dadurch erhaltenen Producte die Kennziffer N + M, so hat man den verlangten sechzigtheiligen Bruch.

Beweis.

Der Nenner eines sechzigtheiligen Bruchs begreift so oft den Factor 60 in sich, als die Kennziffer Einheiten hat. Kommen daher zu eines sechzigtheiligen Bruchs Kennziffer N, M Einheiten, so ist dies eben so viel, als würde sein Nenner narh dem Gesetze eines Products multiplicirt, was m Factoren enthält, deren ein jeder gleich 60 ist. Hieraus ist also einleuchtend, daſs ein Sexagesimalbruch, bei dem vorgeschriebenen Verfahren der Auflösung, unverändert bleiben muſs, weil man hiernach Zähler und Nenner nach dem Gesetze einer und derselben Zahl multiplicirt.

Addi-

Addition der Sexagesimalbrüche.

§. 73.

Aufgabe.

Mehrere sexagesimaltheilige Zahlen zu einander zu addiren.

Auflösung.

Man setze sie so unter einander, dass einerlei Sexagesimalstellen unter einander stehn und addire sie wie zehntheilige Zahlen, nur mit dem Unterschiede, dass man so viele Einheiten in die nächst höhere Sexagesimalstelle setzt, als die Summe die Zahl 60 enthält, die durch die Addition mehrerer Ziffern von einerlei Sexagesimalstellen entstanden ist.

Beweis.

Dieser erhellet unmittelbar aus der Erklärung der Addition und der sechzigtheiligen Brüche.

Beispiel.

$$\begin{array}{rrrrr} 3^{\circ} & 04' & 56'' & 07''' & 12'''' \\ 27^{\circ} & 30' & 40'' & 25''' & 01'''' \\ \hline 30^{\circ} & 35' & 36'' & 32''' & 13'''' \end{array}$$

Zusatz.

Eine ganze Zahl wird zu einer sechzigtheiligen addirt, wenn man sie mit den Ziffern der sechzigtheiligen vereinigt, welche in der Stelle der Ziffern stehn, die ganze Zahlen bedeuten.

Subtraction der Sexagesimalbrüche.

§. 74.

Aufgabe.

Von einer grössern sexagesimaltheiligen Zahl eine kleinere zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setzt die subtrahirende so unter die zuverringernde Zahl, dass einerlei Stellen unter einander stehn, und subtrahirt als-

alsdenn die Ziffern einer jeden Stelle der subtrahirenden Zahl, von den darüber stehenden der zuverringernden. Sollte man in der zuverringernden, von den Ziffern einer höhern Stelle eine Einheit in die nächstniedrige setzen müssen, so bedeutet sie hier 60. Die Ziffern der Differenz sind alsdenn mit den darüberstehenden von einerlei Art.

Beweis.

Dieser kann leicht aus dem Beweise hergeleitet werden, der für die Richtigkeit des Verfahrens geführt ist, was bei der Subtraction ganzer Zahlen beobachtet wird.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 34^{\circ}\ 05'\ 18''\ 23''' \\ 18^{\circ}\ 12'\ 54''\ 14''' \\ \hline 15^{\circ}\ 52'\ 24''\ 09''' \end{array}$$

Zusatz.

Wenn von einer grössern sexagesimaltheiligen Zahl eine kleinere ganze Zahl subtrahirt werden soll, so braucht man nur von der Zahl, welche in der sexagesimaltheiligen in der Stelle der ganzen steht, die gegebene ganze Zahl zu subtrahiren und die Differenz in die Stelle der ganzen der sexagesimaltheiligen Zahl zu setzen.

§. 75.

Aufgabe.

Eine kleinere sexagesimaltheilige Zahl von einer grössern ganzen zu subtrahiren.

Auflösung.

Man verringere die gegebene ganze Zahl um 1 und schreibe sie über die Stelle der subtrahirenden Sexagesimalzahl, welche den ganzen Zahlen zugehört, und schreibe über die darauf folgenden Stellen von der Linken nach der Rechten die Zahl 59, ausser der letzten, über welche 60 geschrieben werden muss. Ist dies geschehn, so subtrahire man die Ziffern der Sexagesimalzahl von den darüber befindlichen nach §. 74. Die Ziffern der Differenz sind alsdenn mit den darüber befindlichen der Sexagesimalzahl von einerlei Art.

Be-

Beweis.

Wenn man von der ganzen Zahl eine Einheit nimmt und sie in die nächste Sexagesimalstelle setzt, so bedeutet sie hier 60. Nimmt man von diesen wieder eine Einheit, so bleiben noch 59 übrig, und setzt man diese Einheit wieder in die nächstfolgende Stelle, so ist ihr Werth hier 60 u. s. w. Auf solche Art wird also die ganze Zahl um eine Einheit vermindert und über die Sexagesimalstellen kömmt 59, ausser über der letzten, über welche 60 kömmt, weil dieser keine Einheit genommen wird. Hieraus ist einleuchtend, dass alle Ziffern, welche über der subtrahirenden Zahl stehn, zusammen genommen, gleich der gegebenen ganzen Zahl sind. Wird also von ihnen die subtrahirende sexagesimaltheilige Zahl subtrahirt, so ist die Differenz die verlangte.

1. Beispiel.

Es soll von 97 die sechzigtheilige Zahl $3^\circ\ 04'\ 59''\ 34'''$ subtrahirt werden.

96°	$59'$	$59''$	$60'''$
3°	$04'$	$59''$	$34'''$
93°	$55'$	$00''$	$26'''$

2. Beispiel.

Es soll von 12 die sechzigtheilige Zahl $05''\ 07'''\ 00''''\ 05'''''$ subtrahirt werden.

11°	$59'$	$59''$	$59'''$	$59''''$	$60'''''$
		$05''$	$07'''$	$00''''$	$05'''''$
11°	$59'$	$54''$	$52'''$	$59''''$	$55'''''$

Multiplication der Sexagesimalbrüche.

§. 76.

Aufgabe.

Einen Sexagesimalbruch Z^N nach dem Gesetze eines andern z^M zu multipliciren.

Auf-

Auflösung.

Man multiplicire Z nach dem Gesetze von z und gebe dem Producte die Kennziffer N + M.

Beweis.

Z^N ist eine gebrochne Zahl, deren Zähler gleich Z und deren Nenner gleich einem Producte von n Factoren ist, wovon ein jeder gleich 60. Eben so ist z^M gleich einer gebrochnen Zahl, deren Zähler gleich z und deren Nenner ein Product von m Factoren ist, wovon ein jeder gleich 60. Multiplicirt man also die eine gebrochne Zahl nach dem Gesetze der andern, so entsteht ein Sexagesimalbruch, dessen Zähler gleich Zz und dessen Nenner ein Product von m + n Factoren ist, wovon ein jeder gleich 60. Ein solcher Sexagesimalbruch hat aber die Kennziffer N + M, folglich ist das verlangte Product gleich Zz^{N+M}.

Beispiel.

$$45'' \cdot 37'' = 155'''' = 2''' \; 35''''.$$

Zusatz.

Hieraus und aus §. 25. erhellet leicht, wie eine Sexagesimalzahl nach dem Gesetze eines Sexagesimalbruchs multiplicirt wird.

§. 77.

Aufgabe.

Eine Sexagesimalzahl nach dem Gesetze einer andern zu multipliciren.

Auflösung.

Man setzt den Multiplicator so unter das Multiplicand, daſs die geringste Stelle des Multiplicators unter der geringsten Stelle des Multiplicands steht, und multiplicirt dann das Multiplicand nach dem Gesetze der einzelnen Sexagesimalbrüche des Multiplicators und zwar von der Rechten nach der Linken, und setzt allemal die Anfangsstelle des Products unter die desjenigen Sexagesimalbruchs, nach dessen Gesetze es durch die Multiplication entstanden ist, so erhält man so viele Reihen von Producten, als der Multiplicator Sexagesimalbrüche enthält. Addirt man diese Reihen nach §. 73., so erhält man das gesuchte Product.

Beweis.

Wenn eine Zahl nach dem Gesetze mehrerer anderer multiplicirt werden soll, so erhält man das Product, wenn man sie

nach

nach dem Gesetze dieser Zahlen einzeln multiplicirt, und nachher die erhaltenen Producte zu einander addirt.

1. *Beispiel.*

$$
\begin{array}{rrrr}
5^{\circ} & 02' & 03'' & \\
 & 05' & 04'' & \\
\hline
 & 20'' & 08''' & 12'''' \\
25' & 10'' & 15''' & \\
\hline
25' & 30'' & 23''' & 12''''
\end{array}
$$

2. *Beispiel.*

$$
\begin{array}{rrrr}
5^{\circ} & 02' & 03'' & \\
 & 05' & 24'' & \\
\hline
02' & 00'' & 49''' & 12'''' \\
25' & 10'' & 15''' & \\
\hline
27' & 11'' & 04''' & 12''''
\end{array}
$$

Division der Sexagesimalbrüche.

§. 78.

Aufgabe.

Einen Sexagesimalbruch Z^N nach dem Gesetze eines andern z^M zu dividiren, wenn N grösser als M ist.

Auflösung.

Der Quotient ist ein Sexagesimalbruch, dessen Zähler ein Quotient des Zählers des Dividends nach dem Gesetze des Zählers des Divisors ist, und dessen Kennziffer gleich N — M ist.

Beweis.

Z^N ist ein Sexagesimalbruch, dessen Zähler gleich Z und dessen Nenner gleich einem Producte ist, was aus n Factoren besteht, wovon ein jeder gleich 60 ist. Eben so ist z^M ein Sexagesimalbruch, dessen Zähler gleich z und dessen Nenner ein Product von m Factoren ist, wovon ein jeder gleich 60.

Divi-

Dividirt man den ersten Bruch nach dem Gesetze des zweiten, so dividirt man Z nach dem Gesetze von z und den Nenner von Z nach dem Gesetze des Nenners von z, folglich wird der Zähler des Quotienten gleich Z : z, und da sich bei der Division der Nenner von den n Factoren, m Factoren aufheben, so bleiben nur noch n — m Factoren übrig, also wird der Nenner des Quotienten ein Product von n — m Factoren, wovon ein jeder gleich 60 ist. Also $Z^N : z^M = (Z : z)^{N-M}$.

Beispiel.

$24''' : 12' = 2''$

1. Zusatz.

Ist die Kennziffer des Dividends kleiner als die des Divisors, so vergrössert man sie nach §. 72.

2. Zusatz.

Ist der Zähler des Dividends kleiner, als der des Divisors, so multiplicire man ihn nach dem Gesetze der Zahl 60 und gebe ihm eine Kennziffer, die um 1 grösser ist, als die vorige.

§. 79.

Aufgabe.

Eine sechzigtheilige Zahl nach dem Gesetze einer andern zu dividiren.

Auflösung.

Man schneide im Dividende so viele Stellen ab, dass diese den Divisor wenigstens einmal enthalten, und setze den Divisor so darunter, dass kein geringster Bruch unter der geringsten Stelle des abgeschnittenen Theils steht, und suche nun die Zahl auf, nach deren Gesetze der Divisor multiplicirt, ein Product gibt, was von dem über dem Divisor befindlichen Theile des Dividends subtrahirt, einen Rest lässt, der kleiner als der Divisor ist. Diese gefundene Zahl ist alsdenn der erste Theil des Quotienten. Zu dem gefundenen Reste zieht man den nächstfolgenden Bruch des Dividends herunter, und verfährt mit der dadurch erhaltenen Zahl, als wenn man die Division aufs neue anfinge, und setzt dieses Verfahren so lange fort, als es

möglich ist. Sollte durch das Herunterziehn eines Sexagesimalbruchs des Dividends noch keine Sexagesimalzahl entstehn, die den Divisor wenigstens einmal in sich begreift, so setzt man in den Quotienten zum Zeichen, dass eine Stelle fehlt, zwei Nullen, und zieht noch einen Bruch des Dividends herunter u. s. w.

Beweis.

Dieser kann leicht aus dem Verfahren, was bei der Multiplication beobachtet wird, hergeleitet werden.

1. Zusatz.

Ist der Zähler des ersten Bruchs des Divisors kleiner, als der des ersten Bruchs des Dividends, so erhält man in den mehrsten Fällen den ersten Theil des Quotienten, wenn man den ersten Bruch des Dividends nach dem Gesetze des ersten Bruchs des Divisors dividirt. Bei der Bestimmung der übrigen Theile des Quotienten ist dieses ebenfalls der Fall.

2. Zusatz.

Sollte der Zähler des höchsten Bruchs des Dividends nicht so groß seyn, als der des höchsten Bruchs des Divisors, so kann man ihn nach dem Gesetze von 60 multipliciren und zu dem Bruche in der nächst folgenden Stelle addiren, und nun die Division anfangen u. s. w.

3. Zusatz.

Ist die Kennziffer des ersten Theils des Dividends, der nach dem Gesetze des ersten Bruchs des Divisors dividirt wird, kleiner als die Kennziffer, welche des Divisors erster Bruch hat, so erhält man nach §. 78. einen Quotienten mit einer negativen Kennziffer. Es entsteht also die Frage, was man sich unter Z^{-M} denken soll? Um dieses einzusehn, braucht man nur zu bedenken, dass Z^{-M} zu Z wird, wenn man zur Kennziffer $-M$, $+M$ addirt. Dies ist aber eben so viel, als wenn man Z^{-M} nach dem Gesetze eines Products dividirte, was M Factoren hat, deren ein jeder gleich 60 ist, folglich muss Z^{-M} eine Zahl seyn, die gleich Z ist, multiplicirt nach dem Gesetze eines Products von m Factoren, deren ein jeder gleich 60 ist. Kommt man also bei der Division auf eine negative Kennziffer, so kann man

diese immer hinschreiben und mit ihr rechnen, wie es die Natur negativer Grössen fordert, wenn man nur nach Beendigung der Division, der Zahl mit der negativen Kennziffer, diese Kennziffer nimmt und sie so oft nach dem Gesetze von 60 multiplicirt, als die Kennziffer Einheiten hat.

Will man aber nicht mit negativen Kennziffern rechnen, so kann man der Vorschrift des zweiten Zusatzes folgen.

1. *Beispiel.*

Dividend $25' \; 30'' \; 23''' \; 12''''$ | $5' \; 04''$ Quotient.
Divisor $5^\circ \; 02' \; 03''$
$5'$
$25' \; 10'' \; 15'''$
$20'' \; 08''' \; 12''''$
$5^\circ \; 02' \; 03''$
$04''$
$20'' \; 08''' \; 12''''$
$0 \; 0 \; 0$

2. *Beispiel.*

$36'' \; 57''' \; 12''''$ | $12' \; 03''$
$3' \; 04''$
$12'$
$36'' \; 48'''$
$09''' \; 12''''$
$03' \; 04''$
$03''$
$09''' \; 12''''$

3. *Beispiel.*

27′ 11″ 04‴ 12⁗ | 5° 02′ 03″
05′ 24″
05°
――――――
27′ 00″
――――――
11″ 04‴
5′ 24″
02′
――――――
10″ 48‴
――――――
16‴ 12⁗
5′ 24″
03″
――――――
16‴ 12⁗
――――――
0 0

4. *Beispiel.*

27′ 11″ 04‴ 12⁗ | 5′ 24″
5° 02′ 03″
5′
――――――
25′ 10″ 15‴
――――――
2′ 00″ 49‴ 12⁗

Oder 120″ 49‴ 12⁗
5° 02′ 03″
24″
――――――
120″ 49‴ 12⁗
――――――
0 0 0

5. Bei-

5. Beispiel.

$12^{\circ}\ 28'\ 25''\ 23'''\ 12'''' \;\big|\; 6^{-''}\ 05^{-'}\ 05^{\circ}\ 04'$

$2''\ 03'''$

$6^{-''}$

$12^{\circ}\ 18'$

$10'\ 25''$

$2''\ 03'''$

$05^{-'}$

$10'\ 15''$

$10''\ 23'''$

$2''\ 03'''$

5°

$10''\ 15'''$

$08'''\ 12''''$

$2''\ 03'''$

$4'$

$8'''\ 12''''$

$0\ \ 0$

Der Quotient $6^{-''}\ 05^{-'}\ 05^{\circ}\ 04'$ ist gleich
$6 \cdot 60 \cdot 60 + 5 \cdot 60 + 05^{\circ} + 04' = 21905^{\circ}\ 04'.$

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

1) Von dem Verhältnisse überhaupt.

§. 80.

Erklärung.

Wenn man von mehrern Dingen nur den Inbegriff ihres gemeinschaftlichen vor Augen hat, so denkt man sich mehrere x (§. 1.), die sich schon durch den Ort der Reihe, in welcher man sie sich denkt, von einander unterscheiden. Mit dem Begriffe, den man mit x verbindet, kann man aber auch noch den Begriff einer Grösse, entweder einer extensiven oder intensiven verknüpfen, und dann können sich die x ausser durch den Ort, auch noch durch die Grösse unterscheiden. Um diesen Unterschied ihrer Grösse zu erfahren, muss man sie in Rücksicht auf diese mit einander vergleichen, und dann stellt man sie im mathematischen Sinne in ein Verhältniss.

§. 81.

Ist also die Rede von zweien x, und man bezeichnet die Grösse des einen mit A und die des andern mit B, und stellt sie in ein Verhältniss, so hat man bei dieser Vergleichung entweder den Zweck, zu erforschen, wie A durch B oder wie B durch A bestimmt wird. Gesetzt nun, es soll A durch B bestimmt werden, so kann dies auf verschiedenen Wegen geschehn, es entsteht also die Frage, welcher Weg dazu gewählt werden, oder welche Regel der Bestimmungsgrund seyn soll?

Die verschiedenen Bestimmungsgründe können sich nur auf die Entstehungsarten der B aus der A stützen, und wenn man diese untersucht, so biethen sich uns folgende zwei dar:

1) Es muss entweder zu B etwas gefügt oder von B etwas genommen werden.

2) Es muſs B mehreremale oder nur ein Stück davon gedacht werden, oder man muſs ſich B mehreremale und auſserdem noch ein Stück davon denken.

Hiernach liegt alſo bey dem erſten Falle der Beſtimmungsgrund darin, daſs zu B etwas addirt werden muſs, was entweder etwas poſitives oder negatives iſt, und folglich iſt das Verhältniſs von A zu B für dieſen Beſtimmungsgrund bekannt, wenn man weiſs, was zu B addirt werden muſs.

Bei dem zweiten Falle iſt der Beſtimmungsgrund der, daſs B entweder nach dem Geſetze einer ganzen Zahl oder einer eigentlichen oder einer uneigentlichen gebrochnen Zahl multiplicirt werden muſs, folglich iſt das Verhältniſs von A zu B für dieſen Beſtimmungsgrund bekannt, wenn man die Zahl kennt, nach deren Geſetze B multiplicirt werden muſs, wenn man aus B, A erhalten will.

Zuſatz.

Der erſte Beſtimmungsgrund läſst ſich bei der Vergleichung jeder zweier A und B anwenden, aber nicht der zweite. Denn wenn B nicht von A, und A nicht von B ein aliquoter Theil ist, ſo findet keine unmittelbare Vergleichung der B mit der A in der Hinſicht ſtatt, daſs man die Zahl erforſchen könnte, nach deren Geſetze B multiplicirt werden muſs, ſondern man iſt in dieſem Falle genöthigt, einen Maaſsſtab anzunehmen, wodurch man ſowohl A als B miſst. Laſſen ſich nun A und B durch einen gemeinſchaftlichen Maaſsſtab meſſen, ſo machen uns auch die beiden Zahlen, die wir dadurch erhalten, mit der Zahl bekannt, nach welcher B multiplicirt werden muſs, laſſen ſie ſich aber nicht durch einen gemeinſchaftlichen Maaſsſtab meſſen, ſo läſst ſich auch keine Zahl angeben, nach welcher B multiplicirt werden muſs, damit ſie gleich A wird, folglich läſst ſich auch durch den zweiten Beſtimmungsgrund nicht ihr Verhältniſs zu A genau angeben. In dieſem Falle iſt das Verhältniſs von A zu B irrational.

2) Von dem arithmetischen Verhältnisse.

§. 82.

Erklärung.

Wenn das Verhältniss zwischen A und B durch den ersten Bestimmungsgrund angegeben wird, so nennt man es ein **arithmetisches** Verhältniss.

§. 83.

Willkührlicher Satz.

Will man also das arithmetische Verhältniss von A zu B bestimmen, so muss zu B etwas addirt werden. Dies sey gleich d, so ist $A = B + d$, also $A - B = d$, oder man erfährt, was zu B addirt werden muss, wenn man B von A subtrahirt. Aus diesem Grunde zeigt man auch durch $A - B$ an, dass man sich A und B in einem arithmetischen Verhältnisse denkt.

§. 84.

Erklärung.

A und B werden **Glieder** des Verhältnisses genannt, und zwar A das **erste** und B das **zweite**. d heisst der **Name** des arithmetischen Verhältnisses oder der **Denominator**.

1. Zusatz.

Da $A - B = d$, $A = B + d$ und $A - d = B$ ist, so erhellet folgendes:

1) Man kann das erste Glied für eine zuverringernde, das zweite Glied für eine subtrahirende Zahl und den Denominator für die Differenz ansehn.
2) Das erste Glied ist gleich der Summe des zweiten Gliedes und des Denominators.
3) Das zweite Glied ist die Differenz des Denominators von dem ersten Gliede.

2. Zusatz.

Wenn die beiden Glieder eines Verhältnisses unter sich gleich sind, d. h. wenn es ein gleichgliedriges ist, so ist der Denominator gleich 0.

3. Zusatz.

Wenn eine Zahl von einer andern subtrahirt wird, so zeigt die Differenz das arithmetische Verhältniss dieser beiden Zahlen zu einander an.

2) Von dem geometrischen Verhältnisse.

§. 86.

Erklärung.

Wenn das Verhältniss zwischen A und B durch den zweiten Bestimmungsgrund angegeben wird, so nennt man es ein geometrisches Verhältniss.

§. 86.

Willkührlicher Satz.

Will man also das geometrische Verhältniss von A zu B bestimmen, so muss man die Zahl aufsuchen, nach deren Gesetze B multiplicirt gleich A wird. Diese Zahl sey gleich e, so ist A = Be, und daher A : B = e. Aus diesem Grunde wird auch durch den Ausdruck A : B angezeigt, dass man sich A und B in einem geometrischen Verhältnisse denkt.

§. 87.

Erklärung.

A und B werden auch hier Glieder des Verhältnisses genannt, und zwar A ist das erste und B das zweite. e heisst der Name des geometrischen Verhältnisses oder der Exponent.

1. Zusatz.

Da A : B = e, A = Be und A : e = B ist, so erhellet folgendes:

1) Man kann das erste Glied für ein Dividend, das zweite Glied für einen Divisor und den Exponenten für einen Quotienten ansehn.
2) Das erste Glied ist gleich einem Producte des zweiten Gliedes nach dem Gesetze des Exponenten.

 3) Das

3) Das zweite Glied ist ein Quotient des ersten Gliedes nach dem Gesetze des Exponenten.

2. *Zusatz.*

Der Exponent eines gleichgliedrigen Verhältnisses ist gleich 1.

3. *Zusatz.*

Wenn eine Zahl nach dem Gesetze einer andern dividird wird, so zeigt der Quotient das geometrische Verhältniss des Dividends zum Divisor an.

---

4) Von der Proportion überhaupt.

§. 88.

1. *Erklärung.*

Ein Verhältniss, was P heissen mag, ist einem andern Q gleich, wenn in P das erste Glied, so durch das zweite bestimmt wird, wie in Q das erste Glied aus dem zweiten entsteht.

Zusatz.

Ein arithmetisches Verhältniss ist dem andern gleich, wenn ihre Denominatoren gleich sind. Ein geometrisches Verhältniss ist dem andern gleich, wenn ihre Exponenten unter sich gleich sind.

2. *Erklärung.*

Zwei gleiche Verhältnisse machen eine Proportion.

Willkührlicher Satz.

Wenn P und Q eine Proportion machen, so wird dies dadurch angezeigt, dass man die beiden Verhältnisse durch das Zeichen der Gleichheit verbindet; die hierher gehörige Figur wäre also $P = Q$.

Zusatz.

Wenn P ein arithmetisches Verhältniss ist, so ist es auch Q; ist P ein geometrisches Verhältniss, so ist es auch Q.

3. *Erklärung.*

Wenn P und Q arithmetische Verhältnisse sind, so bedeutet $P = Q$ eine arithmetische Proportion, wovon also die Figur

A — B = C — D ist. Dies drückt man so aus: A verhält sich arithmetisch zu B, wie sich C arithmetisch zu D verhält, oder A ist in dem arithmetischen Verhältnisse zu B, in welchem C zu D ist.

Zeigen P und Q geometrische Verhältnisse an, so bedeutet P = Q eine geometrische Proportion, wovon also die Figur A : B = C : D ist. Dies drückt man so aus: A ist in dem geometrischen Verhältnisse zu B, in welchem C zu D ist; oder A verhält sich geometrisch zu B, wie sich C geometrisch zu D verhält; oder man sagt schlechtweg, A verhält sich zu B, wie C zu D.

1. *Zusatz.*

Wenn zwei Differenzen unter sich gleich sind, so verhält sich die eine zuverringernde Zahl so arithmetisch zu ihrer subtrahirenden, wie sich die andere zuverringernde Zahl zu ihrer subtrahirenden verhält. (§. 84. 3. Zusatz.)

2. *Zusatz.*

Wenn zwei Quotienten unter sich gleich sind, so verhält sich das eine Dividend so geometrisch zu seinem Divisor, wie sich das andere Dividend geometrisch zu seinem Divisor verhält. (§. 87. 3. Zusatz.)

4. *Erklärung.*

In beiden Proportionen heissen A, B, C und D ihre Glieder. A ist das erste, B das zweite, C das dritte und D das vierte. A und D werden auch die äussern und B und C die innern oder mittlern Glieder genannt. Sind die mittlern Glieder unter sich gleich, so heisst die Proportion eine stetige, zusammenhängende.

5. *Erklärung.*

In einer jeden stetigen Proportion werden die beiden mittlern Glieder als ein Glied angesehn, und daher das mittlere Proportionalglied genannt. Sucht man diese beiden mittlern Glieder, so sagt man, man suche das mittlere Proportionalglied zu den beiden äussern.

5) Von der arithmetischen Proportion.

§. 89.

Lehrsatz.

Wenn in der arithmetischen Proportion $A - B = C - D$, A grösser ist als B, so ist auch C grösser als D.

Beweis.

$A - B$ ist dann nur gleich $C - D$, wenn C so durch D bestimmt wird, wie A aus B entsteht. (§. 88. 1. Erkl.) Muss also zu B, p gesetzt werden, damit aus B, A wird, so muss auch zu D, p gesetzt werden, wenn aus D, C entstehn soll, folglich muss C um so viel grösser als D seyn, als A grösser als B ist.

Zusatz.

Wenn A kleiner ist als B, so ist auch C kleiner als D.

§. 90.

Lehrsatz.

In einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äussern Glieder gleich der Summe der beiden innern.

Beweis.

Es sey in der Proportion $A - B = C - D$, der gemeinschaftliche Denominator gleich δ, so ist nach §. 83. $A = B + \delta$ und $C = D + \delta$, folglich $A + D + \delta = B + C + \delta$ und daher $A + D = B + C$.

1. *Zusatz.*

Es ist

$$A = B + C - D$$
$$B = A + D - C$$
$$C = A + D - B$$
$$D = B + C - A.$$

Man findet also ein äusseres Glied, wenn man von der Summe der beiden innern das andere äussere subtrahirt. Ein mittleres Glied wird gefunden, wenn man von der Summe der beiden äussern, das bekannte mittlere Glied subtrahirt.

2. Zu-

2. *Zuſatz.*

Wenn in einer arithmetiſchen Proportion ein Glied fehlt, ſo kann es durch die drei andern gefunden werden.

3. *Zuſatz.*

Wenn $A - B = B - D$, ſo iſt

$$A + D = 2B, \text{ alſo}$$

$$B = \frac{A + D}{2}.$$

Das mittlere arithmetiſche Proportionalglied iſt die halbe Summe der beiden äuſsern Glieder.

4. *Zuſatz.*

In der Proportion $A - B = C - D$, iſt $A + D = B + C$, alſo $B + C - A = D$ und $B - A = D - C$. Oder es verhält ſich in einer arithmetiſchen Proportion auch das zweite Glied ſo zu dem erſten, wie ſich das ~~dritte~~ Glied zum ~~vierten~~ verhält.

5. *Zuſatz.*

Aus $A + D = B + C$, folgt auch $A + D - C = B$ und $A - C = B - D$. Oder es verhält ſich auch in einer arithmetiſchen Proportion das erſte Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten.

---

6) Von der geometriſchen Proportion.

§. 91.

Lehrſatz.

Wenn in einer geometriſchen Proportion das erſte Glied gröſser iſt als das zweite, ſo iſt auch das dritte Glied gröſser als das vierte.

Beweis.

Es ſey $A : B = C : D$ und der gemeinſchaftliche Exponent gleich e, ſo iſt $A = Be$ und $C = De$, folglich da nach der Vorausſetzung A gröſser als B iſt, ſo iſt e eine ganze ~~Zahl, al~~ſo De gröſser als D, folglich auch D kleiner als C.

Zu-

Zusatz.

Wenn das erste Glied kleiner ist als das zweite, so ist auch das dritte Glied kleiner als das vierte.

§. 92.

Lehrsatz.

In einer jeden geometrischen Proportion ist das Product der beiden äussern Glieder gleich dem Producte der beiden innern.

Beweis.

Es sey A:B = C:D und der gemeinschaftliche Exponent gleich e, so ist A = Be und C = De, also ADe = CBe, folglich AD = BC.

1. Zusatz.

Da AD = BC, so ist
A = BC : D
B = AD : C
C = AD : B
D = BC : A.

Also ein äusseres Glied ist gleich dem Producte der beiden innern, dividirt durch das andere äussere. Und ein inneres Glied ist gleich dem Producte der beiden äussern, dividirt durch das andere innere.

2. Zusatz.

Wenn in einer geometrischen Proportion ein Glied fehlt, so kann es durch die übrigen drei gefunden werden.

3. Zusatz.

Da AD = BC, so ist auch AD:C = B und D:C = B:A, oder welches einerlei ist, B:A = D:C. Es verhält sich also auch das zweite Glied so zum ersten, wie sich das vierte Glied zum dritten verhält.

4. Zusatz.

Es ist AD:C = B und A:C = B:D, folglich verhält sich auch das erste Glied so zum dritten, wie sich das andere zum vierten verhält.

§. 93.

Lehrsatz.

Wenn das Product irgend zweier Zahlen gleich dem Producte zweier andern ist, so verhält sich der eine Factor des ersten Products zu einem Factor des zweiten Products, wie der andere Factor dieses zweiten Products sich zum zweiten Factor des ersten Products verhält.

Beweis.

Es sey GH = MN, so ist
GH : M = N und G : M = N : H.
Hieraus folgt wieder G : N = M : H. (§. 92. 4. Zus.)

1. Zusatz.

Es sey fmnopq = rstvxy, so ist auch
fm . nopq = rst . vxy, also
fm : rst = vxy : nopq und
fm : vxy = rst : nopq
Ferner ist fmno . pq = rs . tvxy, folglich
fmno : rs = tvxy : pq und
fmno : tvxy = rs : pq.
u. s. w.

Wenn also das Product mehrerer Zahlen gleich dem Producte mehrerer anderer ist, so verhält sich das Product einer gewissen Anzahl von Factoren des ersten Products, zu dem Producte irgend einer Anzahl von Factoren des andern Products, wie sich das Product der übrigen Anzahl von Factoren dieses andern Products, zu dem Producte der übrigen Factoren des ersten Products verhält.

2. Zusatz.

Es sey Mm = P
so ist auch M . m = P . 1
also 1 : m = M : P.

Oder die Einheit verhält sich zum Multiplicator, wie das Multiplicand zum Producte.

3. *Zusatz.*

Es sey D das Dividend, d der Divisor und Q der Quotient, so ist $D = dQ$
also auch $1 . D = dQ$
folglich $1 : d = Q : D$.

Oder die Einheit verhält sich zum Divisor, wie der Quotient zum Dividende.

§. 94.

Lehrsatz.

Wenn $A : B = C : D$, so ist auch
$Am : Bm = C : D$.

Oder die Proportion bleibt unverändert, wenn die beiden ersten Glieder nach dem Gesetze einer und derselben Zahl multiplicirt werden.

Beweis.

Es ist $AD = BC$, also auch
$AmD = BmC$, folglich
$Am : Bm = C : D$. §90.

1. *Zusatz.*

$A : B = Cm : Dm$.

2. *Zusatz.*

Da $Am : Bm = C : D$
und $Cm : Dm = A : B$, so ist auch
$Am : Bm = Cm : Dm$.

3. *Zusatz.*

Es ist $Am : Bm = Cn : Dn$.

4. *Zusatz.*

Wenn $A : B = C : D$
so ist auch $A : C = B : D$
also $Am : Cm = B : D$
und $Am : B = Cm : D$.

5. Zu-

5. *Zusatz.*

Ist	$A : B$	$=$	$C : D$
so ist	$B : A$	$=$	$D : C$
also	$Bn : A$	$=$	$Dn : C$
und	$A : Bn$	$=$	$C : Dn.$

6. *Zusatz.*

Es ist $Am : Bn = Cm : Dn.$

§. 95.

Lehrsatz.

Wenn $A : B = C : D$, so ist

$$(A:m) : (B:m) = C : D.$$

Oder die Proportion bleibt unverändert, wenn man die beiden ersten Glieder nach dem Gesetze einer und der nämlichen Zahl dividirt.

Beweis.

Es ist $AD = BC$

und $A . \frac{1}{m} . D = B . \frac{1}{m} . C$

also $A . \frac{1}{m} : B . \frac{1}{m} = C : D$

oder $(A:m) : (B:m) = C : D.$

1. *Zusatz.*

$$A : B = (C:m) : (D:m).$$

2. *Zusatz.*

Da	$(A:m) : (B:m)$	$=$	$C : D$
und	$(C:m) : (D:m)$	$=$	$A : B$
so ist auch	$(A:m) : (B:m)$	$=$	$(C:m) : (D:m).$

3. *Zusatz.*

Es ist $(A:m) : (B:m) = (C:n) : (D:n).$

4. Zu-

4. *Zusatz.*

Wenn $A : B = C : D$
so ist auch $A : C = B : D$
also $(A:m) : (C:m) = B : D$
und $(A:m) : B = (C:m) : D.$

5. *Zusatz.*

Ist $A : B = C : D$
so ist $B : A = D : C$
also $(B:n) : A = (D:n) : C$
und $A : (B:n) = C$

Es ist $(A:m$

L

In einer jeden ge
Summe der beiden erste
Summe der beiden letzte

l

Es sey $A :$

und $AD + \ldots = BC + BD$
oder $(A+B) D = (C+D) B$
folglich $A+B : B = C+D : D$

1. *Zusatz.*

Wenn $A : B = C : D$
so ist auch $B : A = D : C$
also $B+A : A = D+C : C$
und $A : A+B = C : C+D$

Es verhält sich also auch das erste Glied zur Summe des ersten und zweiten, wie sich das dritte Glied zur Summe des dritten und vierten verhält.

2. Zu-

2. Zusatz.

Aus $A : B = C : D$, folgt

$A : C = B : D$

folglich ist $A + C : C = B + D : D$.

Oder die Summe des ersten und dritten Gliedes verhält sich zum dritten Gliede, wie sich die Summe des zweiten und vierten Gliedes zum vierten Gliede verhält.

3. Zusatz.

Es ist $A + C : B + D = C : D$

396.

$a : b = c : d$

$a + b : b = c + d : d$

1) $a : a + b = c : c + d$

2) $a + c : c = b + d : d$

3) $a + c : b + d = c : d$

4) $a : b = a + c : b + d$

5) $a : a + c = b : b + d$

C : B + D

: B + D

e Glied zur Summe des

zweite Glied zur Sum-

portion verhält sich die

ersten, zum zweiten

Gliedes von dem drit-

Beweis.

Es sey $A : B = C : D$

so ist $AD = BC$

und $AD - BD = BC - BD$

oder $(A - B)D = (C - D)B$

folglich $A - B : B = C - D : D$.

1. Zusatz.

Wenn $A : B = C : D$

so ist auch $B : A = D : C$

also $B - A : A = D - C : C$

und $A : B - A = C : D - C$.

2. *Zusatz.*

$$\text{Aus } A : B = C : D \text{ folgt}$$
$$A : C = B : D$$
$$\text{folglich ist } A - C : C = B - D : D.$$

3. *Zusatz.*

$$A - C : B - D = C : D.$$

4. *Zusatz.*

$$\text{Es ist auch } A : B = A - C : B - D$$
$$\text{und } A : A - C = B : B - D.$$

5. *Zusatz.*

$$\text{Nach } A : B = C : D \text{ ist}$$
$$A : C = B : D, \text{ und}$$
$$C : A = D : B, \text{ folglich}$$
$$C - A : A = D - B : B, \text{ oder}$$
$$A : C - A = B : D - B.$$

§. 98.

Die Sätze, die in §. 96. und §. 97. vorkommen, geben mit einander verbunden, noch folgende Proportionen:

1) Die beiden Lehrsätze geben

$$A + B : C + D = A - B : C - D$$

2) Die beiden ersten Zusätze

$$A + B : C + D = B - A : D - C$$

3) Die beiden dritten Zusätze

$$A + C : B + D = A - C : B - D$$

4) Der 4. Zusatz des §. 96. und der 5. Zusatz des §. 97.

$$A + C : B + D = C - A : D - B$$

Anmerkung.

Aus diesen können vermittelst der Versetzungen der Glieder, die nach §. 92. 3. Zus. und 4. Zus. vorgenommen werden dürfen, leicht noch mehrere andere hergeleitet werden.

§. 99.

Lehrsatz.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Wenn} & A : B & = & P : Q \\ \text{und} & C : D & = & P : Q \\ \hline \text{so ist} & A + C : B + D & = & P : Q \end{array}$$

Beweis.

Da sowohl $A : B$ als $C : D$ gleich $P : Q$ ist,

$$\begin{array}{lrcll} \text{so ist} & A : B & = & C : D & \\ \text{folglich} & A + C : B + D & = & C : D & (\text{§. 96. 3. Zus.}) \\ \text{oder} & A + C : B + D & = & P : Q. & \end{array}$$

Zusatz.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Wenn} & A + C : B + D & = & P : Q \\ & E : F & = & P : Q \\ \hline \text{so ist} & A + C + E : B + D + F & = & P : Q \end{array}$$

D. h. Jener Satz, welcher von zweien Proportionen bewiesen ist, gilt auch von dreien. Man sieht aber leicht ein, dass er sich auf diese Weise auf so viele Proportionen ausdehnen läſst, als man nur will, und daher gilt folgende Regel ganz allgemein:

Wenn von mehreren Verhältnissen, ein jedes gleich dem Verhältnisse von P zu Q ist, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder dieser Verhältnisse, zu der Summe aller zweiten Glieder, wie sich P zu Q verhält.

§. 100.

Lehrsatz.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Wenn} & A : B & = & P : Q \\ \text{und} & C : D & = & P : Q \\ \hline \text{so ist} & A - C : B - D & = & P : Q \end{array}$$

Beweis.

Da sowohl $A : B$, als $C : D$ gleich P zu Q ist,

$$\begin{array}{lrcll} \text{so ist} & A : B & = & C : D & \\ \text{also} & A - C : B - D & = & C : D & (\text{§. 97. 3. Zus.}) \\ \text{oder} & A - C : B - D & = & P : Q. & \end{array}$$

Zusatz.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{Wenn} & A-C : B-D & = & P : Q \\
\text{und} & E : F & = & P : Q \\
\hline
\text{so ist} & A-C-E : B-D-F & = & P : Q
\end{array}
$$

D. h. Jener Satz gilt nicht nur von zweien Proportionen, sondern auch von dreien. Da man aber eben so jenen Satz noch auf mehrere ausdehnen kann, so gilt er von so vielen, als man nur will.

§. 101.

Lehrsatz.

$$
\begin{array}{lccc}
\text{Wenn} & A : B & = & C : D \\
\text{und} & E : F & = & G : H \\
\hline
\text{so ist} & AE : BF & = & CG : DH
\end{array}
$$

Beweis.

$$
\begin{array}{lccc}
\text{Es ist} & AD & = & BC \\
 & EH & = & FG \\
\hline
\text{also} & AEDH & = & BFCG \\
\text{folglich} & AE : BF & = & CG : DH
\end{array}
$$

Zusatz.

$$
\begin{array}{lccc}
\text{Wenn} & AE : BF & = & CG : DH \\
\text{und} & M : N & = & O : P \\
\hline
\text{so ist} & AEM : BFN & = & CGO : DHP
\end{array}
$$

Oder jener Satz gilt nicht nur für zwei Proportionen, sondern für jede beliebige Anzahl.

Anmerkung.

So wie gezeigt ist, dass man wieder eine Proportion erhält, wenn man mehrere über einander setzt und ihre unter einander stehende Glieder unter sich multiplicirt, eben so kann auf eine ähnliche Weise gezeigt werden, dass man wieder eine Proportion erhält, wenn man die Glieder der ersten Proportion nach den Gesetzen der darunter stehenden Glieder der übrigen Proportionen dividirt.

Auf-

Aufgabe.

Eine Zahl A in vier Theile zu theilen, die in dem Verhältnisse zu einander stehn, dass sich der erste Theil zum zweiten verhält, wie a : b, der zweite zum dritten, wie b : c, und der dritte zum vierten, wie c : d.

Auflösung.

Die vier gesuchten Theile mögen v, x, y, z heissen, so dass v der erste, x der zweite, y der dritte und z der vierte ist; so ist

$$v = \frac{A}{a+b+c+d} \cdot a$$

$$x = \frac{A}{a+b+c+d} \cdot b$$

$$y = \frac{A}{a+b+c+d} \cdot c$$

$$z = \frac{A}{a+b+c+d} \cdot d$$

Beweis.

Es muss gezeigt werden,

1) dass $A = v + x + y + z$ ist,

2) dass v, x, y und z in den verlangten Verhältnissen zu einander stehn.

Ad 1.

Es ist $v + x + y + z$

$$= \frac{Aa}{a+b+c+d} + \frac{Ab}{a+b+c+d} + \frac{Ac}{a+b+c+d} + \frac{Ad}{a+b+c+d}$$

$$= \frac{Aa+Ab+Ac+Ad}{a+b+c+d} = \frac{A(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = A.$$

Ad 2.

Es ist $v:x = \frac{A}{a+b+c+d} . a : \frac{A}{a+b+c+d} . b = a : b$

$x:y = \frac{A}{a+b+c+d} . b : \frac{A}{a+b+c+d} . c = b : c$

$y:z = \frac{A}{a+b+c+d} . c : \frac{A}{a+b+c+d} . d = c : d$

Anmerkung.

In der Auflösung voriger Aufgabe wird man leicht das Gesetz auffinden, nach welchem A in eine jede beliebige Anzahl von Theilen getheilt werden kann, die zu einander in gegebenen Verhältnissen stehn.

---

7. Von Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 102.

Erklärung.

Wenn man mehrere geometrische Verhältnisse unter einander setzt und die über einander stehenden Glieder unter sich multiplicirt, so entsteht hierdurch ein Verhältniss, von welchem man sagt, dass es aus jenen Verhältnissen zusammengesetzt sey, so ist z. B. ac : bd aus a : b und c : d zusammengesetzt.

§. 103.

Willkührlicher Satz.

Will man anzeigen, dass ein gewisses Verhältniss aus andern zusammengesetzt sey, so muss man zwei Zeichen haben: ein Zeichen, was sagt, aus wie vielen, und ein anderes, was sagt, aus was für Verhältnissen es zusammengesetzt ist. Sind die Verhältnisse unter sich ungleich, so erreicht man aber offenbar den Zweck beider Zeichen, wenn man sie neben einander setzt und durch das Zeichen + verbindet, weil man hieraus sieht, aus was für welchen, und wenn man sie zählt, auch

aus

aus wie vielen Verhältnissen ein gewisses zusammengesetzt ist, und dass sie gezählt werden sollen, sagt das Zeichen +. Ist daher ace : bdf aus a : b, c : d und e : f zusammengesetzt, so bezeichnet man dieses folgendermaßen:

$$ace : bdf = (a:b) + (c:d) + (e:f).$$

Daſs also unter dem Ausdrucke zur Rechten keine Summe von Quotienten gedacht werden darf, versteht sich schon von selbst.

Sind die Verhältnisse, woraus ein gewisses zusammengesetzt ist, unter sich gleich, so ist es nicht nöthig, alle Verhältnisse hinzusetzen, sondern man erreicht schon seinen Zweck, wenn man eine Zahl hinschreibt, die ihre Anzahl anzeigt und dann eines von jenen Verhältniszeichen daneben schreibt, damit man die Verhältnisse kennt, woraus es zusammengesetzt ist. Ist daher p : q aus m Verhältnissen zusammengesetzt, deren ein jedes gleich a : b ist, so bezeichnet man dieses durch p : q = m(a : b).

§. 134.

Zusatz.

Da

$$\frac{1}{m} \cdot m = 1, \text{ so ist}$$

$$a : b = \frac{1}{m} \cdot m(a : b).$$

Ist nun $x : y = m(a : b)$, so ist auch

$$a : b = \frac{1}{m}(x : y).$$

Oder wenn ein Verhältniſs x : y aus m Verhältnissen zusammengesetzt ist, deren ein jedes gleich a : b, und man zeigt dieses durch $x : y = m(a : b)$, so muſs man a : b gleich $\frac{1}{m}(x : y)$ setzen.

§. 135.

Lehrsatz.

Wenn man zwei Verhältnisse wie a : b und [illegible] hat, sie mögen gleich oder ungleich seyn, so ist

$$a : b = [illegible]$$

Beweis.

Wenn man a : b und b : c über einander setzt und die über einander stehenden Glieder unter sich multiplicirt, so erhält man ab : bc = a : c.

Zusatz.

Eben so kann man leicht zeigen, dass das Verhältniss a : f aus a : b, b : c und c : f zusammengesetzt sey. Diese Art zu schliessen kann man offenbar auf so viele Verhältnisse ausdehnen, als man nur immer will. Man hat daher folgende allgemeine Regel: Aus den m Verhältnissen, die unter sich von der Beschaffenheit sind, dass allemal das zweite Glied des nächst vorhergehenden gleich dem ersten Gliede des zunächst darauf folgenden ist, ist das Verhältniss ein zusammengesetztes, dessen erstes Glied gleich dem ersten Gliede des ersten jener m Verhältnisse, und dessen zweites Glied gleich dem zweiten Gliede des letzten jener m Verhältnisse ist.

§. 106.

Lehrsatz.

Das Verhältniss zweier Producte von einer gleichen Anzahl von Factoren, ist aus den Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt, oder ac : bd = (a : b) + (c : d).

Beweis.

Wenn man die ersten und die zweiten Glieder der Verhältnisse der Factoren unter sich multiplicirt, so erhält man das gegebene Verhältniss der Producte.

1. Zusatz.

Es ist fg : gh = (f : h) + (g : g)
aber fg : gh = f : h
folglich f : h = (f : h) + (g : g)

Also bei der Zusammensetzung der Verhältnisse f : h und g : g, zeigt sich g : g ohne alle Würkung. Aus diesem Grunde pflegt man zu sagen, dass bei der Zusammensetzung der Verhältnisse, ein gleichgliedriges gleich Null zu achten sey.

Achtes Kapitel.

Von den Dignitäten.

§. 107.

1. Erklärung.

Wenn A und B unter sich verschiedene Zahlen sind, so kann man sich zwischen A und B eine gewisse Entfernung p denken, die durch das geometrische Verhältniss von A zu B bestimmt wird. Wäre also A : B = B : D, so würde die Weite von A zu B gleich der zwischen B und D seyn, oder B würde in der Mitte zwischen A und D liegen. Stellt man sich aber zwischen A und B eine gewisse Entfernung p vor, so kann man sich denken, dass man von A zu B durch einen Schritt kömmt, der durch diese Weite p gemessen wird. Dieser Schritt ist in Rücksicht auf seine Grösse immer der nämliche, man mag von A zu B oder von B zu A gehn, aber sie sind in so fern von einander verschieden, dass wenn der Schritt von A zu B von der Linken nach der Rechten geht, dass alsdenn der von B zu A von der Rechten nach der Linken geschieht, sie sind also einander entgegengesetzt. Nennt man daher unter dieser Bedingung den Schritt von A zu B den positiven, so ist der von B zu A ein negativer.

2. Erklärung.

Man denke sich die Einheit als einen festen Punkt und gehe von ihr, nach einem bestimmten Gesetze, durch zwei fortlaufende Reihen von Zahlen, wovon sich die eine nach der Rechten und die andere nach der Linken erstreckt, so sind diese beiden Reihen, in so fern als sie von der Einheit aus in entgegengesetzten Richtungen fortlaufen, einander entgegengesetzt, und daher kann die nach der Rechten, die positive, und die nach der Linken hin, die negative Reihe genannt werden.

3. Er-

3. Erklärung.

Es sey das Gesetz, nach welchem die Reihen von Zahlen fortlaufen sollen, dieses, dass allemal zwei zunächst auf einander folgende um den Schritt von 1 zu a entfernt sind, so sey

die positive Reihe $1 \; ; \; a \; ; \; aa \; ; \; aaa$ - - -

so ist die negative Reihe - - - $\frac{1}{aaa} \; ; \; \frac{1}{aa} \; ; \; \frac{1}{a} \; ; \; 1$

folglich ist $\frac{1}{aaa} \; ; \; \frac{1}{aa} \; ; \; \frac{1}{a} \; ; \; 1 \; ; \; a \; ; \; aa \; ; \; aaa$ - - -

die Figur, welche beide Reihen vorstellt, wie sie von der Einheit aus fortlaufen.

Wird nun für a eine bestimmte Zahl gesetzt, eine positive oder negative, eine ganze oder gebrochne, so heisst die Zahl von ihr eine Dignität, Potenz, Potestät, zwischen welcher und der Einheit man entweder die ganze Weite von 1 zu a ein oder mehreremal antrifft, oder zwischen welcher und der Einheit nur ein Theil oder mehrere gleiche Theile dieser Weite liegen, wobei es einerlei ist, ob sich die Zahl in der positiven oder negativen Reihe befindet. Befindet sie sich in der positiven Reihe, so wird ihre Weite von der Einheit aus durch positive, befindet sie sich in der negativen Reihe, so wird ihre Weite von der Einheit aus, durch negative Schritte gemessen. (§. 107. 1. Erkl.)

Diesen Dignitäten von a legt man verschiedene Grade nach der Zahl bei, welche sagt, wie viele Schritte, wovon ein jeder gleich 1 : a ist, zwischen ihr und der Einheit liegen, oder wie viele gleiche Theile dieser nämlichen Weite sich zwischen ihr und der Einheit befinden. So ist z. B. aa von a eine Dignität vom zweiten Grade, weil zwischen 1 und aa, die Weite 1 : a zweimal liegt; aaa ist von a eine Dignität vom dritten Grade, weil zwischen 1 und aaa die Weite 1 : a dreimal liegt u. s. w.

Anmerkung.

Eine Dignität von m^{ten} Grade nennt man auch schlechtweg, die m^{te} Dignität. Die zweite Dignität führt noch den Namen des Quadrats; die dritte Dignität heisst auch Cubus, Würfel, und die vierte Dignität wird oft Biquadrat genannt.

4. Erklärung.

Die Zahl a heisst in Rücksicht auf die Zahlen, welche von ihr Dignitäten sind, die **Wurzel**, und ihr Grad stimmt allemal mit dem Grade der Dignität überein, wovon sie die Wurzel ist. So ist z. B. a von aaa, die Wurzel der dritten Dignität; oder Kubikwurzel.

§. 108.

Willkührlicher Satz.

Wenn q die m^te Dignität von a ist und in der positiven Reihe liegt, so dass man von 1 zu q kömmt, wenn man m positive Schritte thut, deren ein jeder gleich 1 : a ist, so setzt man $q = a^m$. Der Ausdruck a^m sagt also:

1) Dass q die m^te Dignität von a sey. Der Grad der Dignität wird daher durch die Anzahl der Einheiten von m angezeigt.
2) Dass q in der positiven Reihe liege. Diese Lage wird durch das positive Zeichen von m angezeigt.

Ist also r die n^te Dignität von a, liegt aber in der negativen Reihe, so muss $r = a^{-n}$ gesetzt werden. m und $-n$ werden **Exponenten** der Dignitäten q und r genannt.

1. Zusatz.

Nach §. 107. 3. Erkl. ist die n^te Dignität in der negativen Reihe gleich $\frac{1}{a^n}$, folglich ist auch $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder wenn der Exponent einer Dignität negativ ist, so ist sie gleich einer gebrochnen Zahl, deren Zähler gleich 1 und deren Nenner gleich der Dignität des nämlichen Grades ist, die aber einen positiven Exponenten hat.

2. Zusatz.

Wenn a positiv ist, so ist auch sowohl a^{2m} als a^{2m+1} positiv. Ist aber a negativ, so geht man bei dem ersten Schritte von der positiven Einheit zu $-a$, also zu einer Zahl, welche a mal so gross ist als $+1$, die man sich aber unter einer Bedingung denkt, die der entgegengesetzt ist, worunter man sich $+1$ denkt. Um zur zweiten Dignität zu kommen, muss von

$-a$ aus der nämliche Schritt geschehn, man muſs alſo von $-a$ zu einer Zahl gehn, welche a mal ſo groſs iſt als $-a$, aber unter einer Bedingung gedacht, die der entgegengeſetzt iſt, unter welcher man ſich $-a$ denkt, man kömmt alſo zu $+a^2$. Der nämliche Schritt, welcher ſich zwiſchen 1 und $+a^2$ befindet, liegt zwiſchen $+1$ und der $2m^{ten}$ Dignität m mal, folglich um die $2m^{te}$ Dignität zu erhalten, braucht man nur von $+1$ aus, m Schritte zu thun, wovon ein jeder gleich $1:+a^2$ iſt. Bei dieſem Schritte geht man aber von einer poſitiven Zahl zu einer andern poſitiven, folglich führen uns auch die folgenden Schritte nur zu poſitiven Zahlen, und daher kann die $2m^{te}$ Dignität von $-a$ nur poſitiv ſeyn. Es iſt alſo a^{2m} beſtändig poſitiv, es läſst ſich folglich keine negative Zahl als Dignität mit einem graden Exponenten denken.

Um zur $2m+1^{ten}$ Dignität von $-a$ zu kommen, muſs von a^{2m} aus ein Schritt geſchehn, wie der von $+1$ zu $-a$ iſt, folglich kömmt man zu $-a^{2m+1}$. Das Zeichen der Dignität eines ungraden Exponenten, ſtimmt folglich allemal mit dem Zeichen der Wurzel überein.

3. *Zuſatz*.

Wenn in der Reihe:

$1\ ;\quad p\ ;\ q\ ;\ a\quad ;\quad a^2 - - - - - a^m\ ;\quad r\ ;\ s\ ;\ a^{m+1}$

p in der Mitte zwiſchen 1 und a liegt, ſo iſt der Weg von 1 zu p nur halb ſo groſs, als der von 1 zu a, um alſo von 1 zu p zu kommen, muſs man den halben Weg von 1 zu a zurück legen, folglich wird $p = a^{\frac{1}{2}}$ ſeyn.

Liegt q in der Mitte zwiſchen p und a, ſo liegt zwiſchen p und q nur ein Viertel der Weite von 1 zu a, alſo zwiſchen 1 und q die Hälfte und ein Viertel der Weite von 1 zu a, folglich wird $q = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$ ſeyn.

Iſt r in der Mitte zwiſchen a^m und a^{m+1}, ſo liegt der Schritt von 1 zu a, zwiſchen 1 und r, $m+\frac{1}{2}$ mal, folglich iſt $r = a^{m+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2m+1}{2}}$.

Liegt

Liegt s in der Mitte zwischen r und a^{m+1}, so muss man, um von 1 zu s zu kommen, $m + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ Schritte thun, deren ein jeder gleich dem von 1 zu a ist, folglich wird s $= a^{m+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{4m+3}{4}}$ seyn.

Stellt man diese nämliche Betrachtung bei der Reihe a^{-m}; p; q; $a^{-(m-1)}$; ..... a^{-4} ; a^{-3} ; a^{-2} ; a^{-1} ; 1 an, in welcher p in der Mitte zwischen a^{-m} und $a^{-(m-1)}$ und q in der Mitte zwischen p und $a^{-(m-1)}$ liegen mag, so befindet sich der Schritt von a zu 1 zwischen 1 und p, $m-1+\frac{1}{2}$, oder welches einerlei ist, $m-\frac{1}{2}$ mal, folglich ist $p = a^{-(m-\frac{1}{2})}$.

Zwischen 1 und q befinden sich erst die Schritte von 1 zu p und ausserdem noch $\frac{1}{4}$ der Weite von a zu 1, folglich befindet sich zwischen 1 und q, die Weite von a zu 1 überhaupt $m-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, oder welches einerlei ist, $m-\frac{1}{4}$ mal, folglich ist $q = a^{-(m-\frac{1}{4})}$.

4. *Zusatz.*

Der allgemeine Ausdruck für eine jede Dignität von a, ist $a^{\pm\frac{m}{n}}$.

5. *Zusatz.*

Da der Schritt von 1 zu a, zwischen 1 und a nur einmal denkbar ist, so ist einleuchtend, dass $a = a^1$, oder dass a die erste Dignität von sich selbst sey.

6. *Zusatz.*

a^0 ist mit 1 einerlei; denn 0 zeigt in a^0 an, dass man, um von 1 zu a^0 zu kommen, gar keinen Schritt zu thun brauche, sondern dass man zu a^0 schon gekommen sey, wenn man sich in der Einheit befindet, also dass a^0 und die Einheit einerlei bedeuten.

§. 109.

Lehrsatz.

Wenn m eine ganze Zahl ist, so ist a^m ein Product von m Factoren, deren ein jeder gleich a ist.

Beweis.

Um von 1 zu a^m zu kommen, muſs man m Schritte thun, wovon ein jeder gleich 1 : a iſt. Da nun allemal zwei um dieſe Weite von einander entfernte Glieder zu einander das Verhältniſs von 1 zu a haben, ſo iſt einleuchtend, daſs man bei einem jeden Schritte zu einem Producte kömmt, was a einmal mehr enthält, als die Zahl, von welcher aus man dieſen Schritt that. Nun führt aber der erſte Schritt zu a, folglich müſſen wohl m Schritte zu einem Producte führen, was m Factoren enthält, deren ein jeder gleich a iſt.

Anmerkung.

Alſo ein Product, was aus gleichen Factoren beſteht, iſt eine Dignität, aber nicht eine jede Dignität iſt als ſolche ein Product aus unter ſich gleichen Factoren.

§. 110.

Erklärung.

Das Verfahren, wodurch eine Zahl zu einer Dignität vom n^{ten} Grade von ſich ſelbſt gemacht wird, heiſst ſie zur n^{ten} Dignität erheben.

1. Zuſatz.

Wenn m eine ganze Zahl iſt, ſo wird b zur m^{ten} Dignität erhoben, wenn man b nach ihrem eigenen Geſetze $m-1$ mal multiplicirt.

2. Zuſatz.

Eine gebrochne Zahl wird unter der Bedingung, daſs m eine ganze Zahl iſt, zur m^{ten} Dignität erhoben, wenn man Zähler und Nenner, jede dieſer Zahlen $m-1$ mal nach ihrem eigenen Geſetze multiplicirt.

3. Zuſatz.

Wenn eine Dignität mit einem ganzen Exponenten, eine ganze Zahl zur Wurzel hat, ſo iſt ſie eine ganze Zahl. Hat ſie eine eigentliche gebrochne Zahl zur Wurzel, ſo iſt auch ſie eine eigentliche gebrochne Zahl. Hat aber die Dignität eine uneigentliche gebrochne Zahl zur Wurzel, ſo iſt ſie eine uneigentliche gebrochne Zahl.

§. 111.

Willkührlicher Satz.

Wenn man sich eine Dignität wiederholt denkt, und nun zählt, wie oft dieses geschehn sey, so wird der ganze Denkact dadurch angezeigt, dass man den Ausdruck für die Dignität hinschreibt, und vor ihn eine Zahl mit dem Zeichen der Multiplication setzt, welche sagt, wie oft die Dignität gedacht wird. Diese Zahl heisst der C o e f f i c i e n t. Also der Ausdruck ma^n sagt, dass man sich a^n, m mal denkt. Denkt man sich daher a^n nur e i n mal, so braucht kein Coefficient hinzugefügt zu werden.

Addition der Dignitäten.

§. 112.

A u f g a b e.

Es soll ein Ausdruck gefunden werden, der ma^n und pa^n vereinigt darstellt.

A u f l ö s u n g.

Der Ausdruck ma^n sagt, dass man sich a^n, m mal denkt, und pa^n zeigt an, dass a^n, p mal gedacht wird, folglich wird der gesuchte Ausdruck d e r seyn, welcher sagt, wie oft man sich a^n überhaupt denkt. Ein solcher Ausdruck ist aber $(m+p)a^n$, folglich ist dieser auch der gesuchte.

1. Zusatz.

Sollen also mehrere Dignitäten zu einander addirt werden, die einerlei Wurzel und einerlei Exponenten haben, so schreibt man die gemeinschaftliche Dignität hin und gibt ihr einen Coefficienten, der gleich der Summe der Coefficienten aller gegebenen Dignitäten ist.

2. Zusatz.

Wenn Ausdrücke gegeben sind, die nicht einerlei Dignitäten enthalten, so kann ihre Summe [illegible] ge- [illegible] gefunden werden. Man muss [illegible], wenn [illegible]

sie als ein einziger gedacht werden sollen, unverändert neben einander setzen. (§. 18. 2. willkühr. Satz.) Sind z. B. ma^n und $-pa^q$ gegeben, so wird ihre Summe durch $ma^n - pa^q$ angezeigt.

Subtraction der Dignitäten.

§. 113.

Aufgabe.

Es wird ein Ausdruck verlangt, der die Differenz der pa^n von ma^n ist.

Auflösung.

Man muss sich hier vorstellen, dass pa^n in ma^n mit einem andern ähnlichen Ausdrucke xa^n vereinigt enthalten ist, so dass die Summe von pa^n und xa^n gleich ma^n und daher die Differenz der pa^n von ma^n gleich xa^n ist. Die Vereinigung der pa^n mit xa^n geschieht aber dadurch, dass man a^n hinschreibt und ihr einen Coefficienten gibt, der gleich der Summe von p und x ist, folglich muss in der gesuchten Differenz xa^n, der Coefficient x gleich $m - p$ seyn.

1. Zusatz.

Wenn also Dignitäten von einander subtrahirt werden sollen, die einerlei Wurzel und einerlei Exponenten haben, so erhält man die Differenz, wenn man die gemeinschaftliche Dignität hinschreibt und dieser einen Coefficienten gibt, den man bekömmt, wenn der Coefficient des subtrahirenden Ausdrucks, von dem Coefficienten des zuverringernden Ausdrucks subtrahirt wird.

2. Zusatz.

Da die Addition zweier Ausdrücke, die verschiedene Dignitäten enthalten, dadurch geschieht, dass man sie unverändert neben einander setzt, und bei der Subtraction wie bei der Addition verfahren wird, wenn der subtrahirenden Zahl das entgegengesetzte Zeichen gegeben ist, so zeigt man die Differenz dadurch an, dass man den zuverringernden Ausdruck mit dem gegebenen Zeichen hinschreibt, und neben ihr den subtrahirenden

Aus-

Ausdruck mit veränderten Zeichen setzt. So ist z. B. die Differenz der $-pa^n$ von ma^q gleich $ma^q + pa^n$.

Multiplication der Dignitäten.

§. 114.

Bei der Multiplication kömmt alles auf den Satz an, dass sich die Einheit geometrisch zum Multiplicator verhält, wie das Multiplicand zum Producte (§. 93. 2. Zus.), folglich dass sich zwischen der Einheit und dem Multiplicator, die nämliche Weite befindet, die man zwischen dem Multiplicande und Producte antrifft, so dass man zum Producte kömmt, wenn man von dem Multiplicande aus, den nämlichen Weg zurückgelegt hat, der zurückgelegt werden muss, wenn man von der Einheit aus, zum Multiplicator kommen will.

§. 115.

Aufgabe.

Es wird für das Product der a^q nach dem Gesetze der a^n ein Ausdruck gesucht.

Auflösung.

Um in der Reihe des §. 107. 3. Erkl. von a^q zum Producte zu kommen, müssen von a^q aus so viele positive Schritte geschehn (§. 107. 1. Erkl.), als erfordert werden, wenn man von der Einheit zu a^n kommen will. Die Einheit ist aber von a^n, n positive Schritte entfernt, deren ein jeder gleich $1 : a$ ist, folglich liegen auch eben so viele dieser nämlichen Schritte zwischen a^q und dem gesuchten Producte. Zwischen der Einheit und a^q liegen aber schon q der gedachten Schritte, folglich muss des Products Entfernung von der Einheit, $n + q$ Schritte betragen, deren ein jeder gleich $1 : a$ ist, oder es muss das gesuchte Product gleich a^{n+q} seyn. (§. 107. 3. Erklär. und §. 108.)

Zusatz.

Es ist das Product der $a^{\frac{p}{q}}$ nach dem Gesetze der $a^{\frac{m}{n}}$ gleich $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

§. 116.

Aufgabe.

Es wird das Product der a^{-n} nach dem Gesetze der a^{-m} gesucht.

Auflösung.

Hier muss man, um zu dem Producte zu kommen, von a^{-n} aus so viele negative Schritte thun, deren ein jeder gleich $a:1$ ist, als man gehn muss, wenn man von der Einheit zu a^{-m} kommen will. Zwischen 1 und a^{-n} liegen aber schon n dieser Schritte, folglich thut man von a^{-n} aus noch m der nämlichen Schritte, so hat man sich von der Einheit überhaupt um m + n der gedachten negativen Schritte entfernt, oder es ist das Product gleich $a^{-(m+n)}$.

Zusatz.

Es ist das Product der $a^{-\frac{m}{n}}$ nach dem Gesetze der $a^{-\frac{p}{q}}$ gleich $a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}$.

§. 117.

Aufgabe.

Es soll das Product der a^n nach dem Gesetze der a^{-m} gesucht werden.

Auflösung.

Man kömmt hier von a^n zum Producte, wie man von 1 zu a^{-m} kömmt. Zu a^{-m} kömmt man aber, wenn man von 1 aus, m negative Schritte geht, wovon ein jeder gleich a zu 1 ist; folglich ist man zum Producte gekommen, wenn man von a^n aus, m negative Schritte gethan hat.

Gesetzt nun, es sey m kleiner als n, so bleibt man, wenn von a^n aus m negative Schritte geschehn sind, noch in der positiven Reihe,

weil

weil a^n darin liegt (§. 107. 2. Erkl.), man ist aber dadurch der Einheit um m Schritte näher gekommen, folglich ist man von ihr nur noch $n - m$ positive Schritte entfernt, oder das Product ist gleich a^{n-m}; wo also $n - m$ positiv ist.

Ist aber m grösser als n z. B. um p, so muss man, um von a^n aus zu dem Producte zu kommen, durch $n + p$ negative Schritte gehn. Hat man n dieser Schritte gethan, so befindet man sich schon in der Einheit, nun müssen aber noch p negative Schritte geschehn, folglich befindet man sich im Producte, wenn man sich von der Einheit um p negative Schritte entfernt hat, und daher ist das Product gleich a^{-p}. Da nun $m = n + p$, so ist $p = m - n$, also $-p = -(m - n)$, folglich auch das Product gleich $a^{-(m-n)}$, wo aber $-(m-n)$ negativ ist.

Zusatz.

Es ist das Product der $a^{\frac{p}{q}}$ nach dem Gesetze der $a^{-\frac{m}{n}}$ gleich $a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, wenn $\frac{p}{q}$ grösser als $\frac{m}{n}$ ist; so dass $\frac{p}{q} - \frac{m}{n}$ positiv ist.

Ist aber $\frac{p}{q}$ kleiner, als $\frac{m}{n}$, so ist das Product gleich $a^{-\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)}$ und $-\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)$ ist negativ.

§. 118.

Untersucht man die verschiedenen Producte, welche bei der Multiplication der Dignitäten von einerlei Wurzel, deren Coefficient gleich 1 ist, erhalten sind, so findet man folgende allgemeine Regel: Man schreibt die gemeinschaftliche Wurzel hin und gibt dieser einen Exponenten, der gleich der Summe der Exponenten der Factoren ist. Sollten die Coefficienten nicht gleich 1 seyn, so muss man jenem Producte einen Coefficienten geben, der gleich dem Producte der Coefficienten aller Factoren ist. Denn es ist $pa^n \cdot qa^m = p \cdot a^n \cdot q \cdot a^m = p \cdot q \cdot a^n \cdot a^m = pqa^{n+m}$.

§. 119.

Aufgabe.

Es wird das Product der a^m nach dem Gesetze der b^n verlangt.

Auflösung.

Man kömmt hier zum Producte, wenn man in der Dignitäten Reihe, deren Wurzel b ist, von a^m aus n positive Schritte thut, wovon ein jeder gleich 1 : b ist. Um aber zu wissen, wo man sich dann befindet, muss nothwendig bekannt seyn, wie oft der Schritt von 1 zu b zwischen der Einheit und a^m liegt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn a^m als eine Dignität von b dargestellt wird. Geschieht dies also nicht, so kann auch das Product nicht als eine Dignität von b angegeben werden.

Wollte man das Product in der Dignitäten Reihe suchen, deren Wurzel a ist, sollte also a^m der Multiplicator seyn, so müsste bestimmt werden, wie oft der Schritt von 1 zu a, zwischen 1 und b^n liegt, es müsste also b^n als eine Dignität von a angegeben werden. Geschieht dieses nicht, so kann man auch nicht das Product als eine Dignität von a darstellen.

Es bleibt folglich in diesem Fall nichts weiter übrig, als die beiden Ausdrücke a^m und b^n durch das Zeichen der Multiplication zu verbinden.

Zusatz.

Es ist $pa^m \cdot qb^n = pqa^m \cdot b^n$.

Division der Dignitäten.

§. 120.

Bei der Division kömmt alles auf den Satz an, dass sich die Einheit geometrisch zum Divisor verhält, wie der Dividend zum Quotienten (§. 93. 3. Zus.), folglich dass sich zwischen dem Divisor und der Einheit die nämliche Weite befindet, die man zwischen dem Dividende und Quotienten antrifft, so dass man zum Quotienten kömmt, wenn man von dem

dem Dividende aus den nämlichen Weg zurücklegt, der zurückgelegt werden muss, wenn man von dem Divisor aus zur Einheit kommen will.

§. 121.

Aufgabe.

Es wird der Quotient der a^q nach dem Gesetze der a^r verlangt.

Auflösung.

Nach §. 120. kömmt man von a^q zu den Quotienten, wie man von a^r zu der Einheit kömmt. Um aber von a^r zur Einheit zu kommen, müssen r negative Schritte geschehn, deren ein jeder gleich a : 1 ist, folglich muss auch die nämliche Strecke von a^q aus zurückgelegt werden, wenn man von a^q zum Quotienten kommen will. Zwischen der Einheit und a^q liegt aber der Schritt a : 1, q mal, ist also r kleiner als q, so befindet man sich noch in der positiven Reihe, wenn von a^q aus r jener negativen Schritte gethan sind, man ist aber dadurch der Einheit um r Schritte näher gekommen, folglich von ihr nur noch q − r Schritte entfernt, und daher ist der Quotient gleich a^{q-r}, gleich einer Dignität mit einem positiven Exponenten.

Ist aber r grösser als q, so sey $r = q + t$. Will man also von a^q aus zum Quotienten kommen, so muss man q + t der gedachten negativen Schritte thun. q Schritte bringen aber schon zur Einheit, da nun ausser diesen noch t der nämlichen Schritte geschehn müssen, so kömmt man in die negative Reihe, und wenn die Strecke zurückgelegt ist, welche t vorschreibt, so befindet man sich in ihr von der Einheit um t negative Schritte entfernt, folglich ist der Quotient gleich a^{-t}. Da nun nach der Voraussetzung $t = r - q$, so ist $-t = -(r-q)$, also auch der Quotient $a^{-t} = a^{-(r-q)}$.

 Zu-

Zusatz.

Es ist der Quotient der $a^{\frac{p}{q}}$ nach dem Gesetze der $a^{\frac{m}{n}}$ gleich $a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, wenn $\frac{m}{n}$ kleiner als $\frac{p}{q}$ ist, so daſs der Ausdruck $\frac{p}{q}-\frac{m}{n}$ positiv ist.

Ist aber $\frac{m}{n}$ gröſser als $\frac{p}{q}$, so entsteht eine Dignität mit einem negativen Exponenten, oder der Quotient ist gleich $a^{-\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)}$.

§. 122.

Aufgabe.

Es wird der Quotient der a^{-q} nach dem Gesetze der a^{-r} gesucht.

Auflösung.

Es führen hier von a^{-r} aus, r positive Schritte zur Einheit, folglich führen auch von a^{-q} aus, r positive Schritte zum Quotienten.

Ist q gröſser als r, so bringen r positive Schritte von a^{-q} aus, noch nicht in die positive Reihe, sondern sie bewürken nur, daſs man der Einheit um r Schritte näher kömmt, folglich ist man dann von ihr nur noch $q-r$ negative Schritte entfernt, oder der Quotient ist gleich $a^{-(q-r)}$, wo $-(q-r)$ negativ ist.

Ist r gröſser als q, so mag $r = q + t$ seyn. In diesem Falle führen von a^{-q} aus erst $q + t$ positive Schritte zum Quotienten. Aber q dieser Schritte bringen schon zur Einheit, folglich führen $q + t$ Schritte in die positive Reihe, sie führen zu einem Punkt, der hier von der Einheit t positive Schritte entfernt ist, oder es ist der Quotient gleich a^{t}. Da nun nach dem vorhergehenden $t = r - q$ ist, so ist auch der Quotient gleich a^{r-q}, wo also $r-q$ positiv ist.

Zusatz.

Der Quotient der $a^{-\frac{m}{n}}$ nach dem Gesetze der $a^{-\frac{p}{q}}$ ist gleich $a^{-\left(\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\right)}$, gleich einer Dignität mit einem negativen Exponenten, wenn $\frac{p}{q}$ kleiner als $\frac{m}{n}$ ist. Ist aber $\frac{p}{q}$ größer als $\frac{m}{n}$, so ist der Quotient gleich $a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, gleich einer Dignität mit einem positiven Exponenten.

§. 123.

Aufgabe.

Es soll der Quotient der a^q nach dem Gesetze der a^{-r} gesucht werden.

Auflösung.

Von a^{-r} aus, führen r positive Schritte zur Einheit, folglich führen auch von a^q aus, r positive Schritte zum Quotienten. Zwischen 1 und a^q liegen aber schon q positive Schritte, folglich liegen zwischen der Einheit und dem Quotienten $q+r$ solcher Schritte, oder $a^q : a^{-r} = a^{q+r}$.

Zusatz.

Es ist der Quotient der $a^{\frac{m}{n}}$ nach dem Gesetze der $a^{-\frac{p}{q}}$, gleich $a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

§. 124.

Aufgabe.

Man verlangt den Quotienten der a^{-q} nach dem Gesetze der a^r zu wissen.

Auflösung.

Von a^r aus kömmt man durch r negative Schritte zur Einheit, folglich kömmt man auch von a^q aus durch r negative Schritte zum Quotienten. Zwischen der Einheit und a^{-q} lie-

 gen

gen aber schon q negative Schritte, folglich müssen sich zwischen der Einheit und dem Quotienten $q+r$ negative Schritte befinden, oder es muss der Quotient gleich $a^{-(q+r)}$ seyn.

Zusatz.

Es ist der Quotient der $a^{-\frac{m}{n}}$ nach dem Gesetze der $a^{\frac{p}{q}}$ gleich $a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}$.

§. 125.

Untersucht man die verschiedenen Quotienten, welche bei der Division der Dignitäten von einerlei Wurzel, deren Coefficient gleich 1 ist, erhalten sind, so findet man folgende allgemeine Regel: Man schreibt die gemeinschaftliche Wurzel des Dividends und des Divisors hin und gibt dieser einen Exponenten, den man erhält, wenn man von dem Exponenten des Dividends, den Exponenten des Divisors subtrahirt. Sollten die Coefficienten nicht gleich 1 seyn, so muss man jenem Quotienten noch einen Coefficienten geben, der gleich dem Quotienten des Coefficienten des Dividends nach dem Gesetze des Coefficienten des Divisors ist. Denn es ist $pa^n : qa^m = p \cdot a^n : q \cdot a^m$ gleich $(p : q)(a^n : a^m) = (p : q)\, a^{n-m}$.

§. 126.

Aufgabe.

Es wird der Quotient der a^m nach dem Gesetze der b^n gesucht.

Auflösung.

So wie im §. 119. gezeigt ist, dass das Product der a^m nach dem Gesetze der b^n nicht als eine Dignität von a oder b dargestellt werden kann, eben so lässt sich leicht auf ähnliche Weise zeigen, dass der Quotient der a^m nach dem Gesetze der b^n, nur durch $a^m : b^n$ angezeigt werden kann.

Zusatz.

Es ist $pa^m : qb^n = p \cdot a^m : q \cdot b^n = (p : q)(a^m : b^n)$.

Von

Von der Erhebung einer Dignität zu einer andern, deren Exponent gegeben ist.

§. 127.

Aufgabe.

Es soll ein Ausdruck gefunden werden, der die m^{te} Dignität von a^n darstellt.

Auflösung.

Wenn a^n soll zur m^{ten} Dignität erhoben werden, so sieht man a^n als eine Wurzel der gesuchten Dignität an, folglich liegt der angenommene Maasstab $1 : a^n$, zwischen 1 und der verlangten Dignität, m mal. Da nun der Maasstab $1 : a$ zwischen 1 und a^n, n mal liegt, so muss er zwischen 1 und der gesuchten Dignität mn mal liegen, folglich auch $(a^n)^m = a^{nm}$ seyn.

Zusatz.

Es ist 1) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m = a^{\frac{pm}{q}}$, 2) $(a^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{q}}$,

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

§. 128.

Aufgabe.

Es soll $(a^m)^{-n}$ als eine Dignität von a dargestellt werden.

Auflösung.

Die $+ n^{te}$ und die $- n^{te}$ Dignität von a^m haben von der Einheit einerlei Entfernung, also müssen auch ihre Exponenten gleich gross seyn. Aber die $+ n^{te}$ Dignität von a^m liegt in der positiven Reihe (§. 127.), folglich die $- n^{te}$ Dignität in der negativen Reihe, ist daher $(a^m)^n = a^{mn}$, so muss $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ seyn.

Zusatz.

Es ist 1) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{-m} = a^{-\frac{mp}{q}}$, 2) $(a^n)^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{np}{q}}$,

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$.

§. 129.

§. 129.

Aufgabe.

Es wird ein Ausdruck gesucht, der die m^{te} Dignität von a^{-n} darstellt.

Auflösung.

Der hier zum Grunde gelegte Maasstab, wodurch die Entfernung der gesuchten Dignität von 1 bestimmt wird, ist $1 : a^{-n}$. Da nun der zum Grunde gelegte Maasstab, zwischen 1 und der m^{ten} Dignität von a^{-n}, m mal liegt, so muss auch der Maasstab $1 : a^{-n}$ zwischen 1 und $(a^{-n})^m$, m mal liegen, oder welches einerlei ist, man kömmt von 1 zur gesuchten m^{ten} Dignität, wenn man den Schritt $1 : a^{-n}$, m mal thut. Der Schritt von 1 zu a^{-n} geht aber von der Rechten nach der Linken, folglich kömmt man auch in dieser Richtung zur gesuchten Dignität, sie liegt also in der negativen Reihe, und daher ist ihr Exponent negativ. Zwischen 1 und a^{-n} liegen aber n geometrische Weiten, deren eine jede gleich $a : 1$ ist, folglich müssen zwischen 1 und der gedachten m^{ten} Dignität, m mal so viele, also mn dieser Schritte liegen, oder es muss $(a^{-n})^m = a^{-nm}$ seyn.

Zusatz.

Es ist 1) $\left(a^{-\frac{p}{q}}\right)^m = a^{-\frac{mp}{q}}$, 2) $\left(a^{-n}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{np}{q}}$, 3) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$.

§. 130.

Aufgabe.

Es soll ein Ausdruck gefunden werden, der $(a^{-n})^{-m}$ als eine Dignität von a darstellt.

Auflösung.

Die $+m^{te}$ und $-m^{te}$ Dignität von a^{-n} haben von der Einheit einerlei Entfernung, sie haben also gleich grosse Exponenten, da sie aber auf entgegengesetzten Seiten der Einheit liegen, so müssen auch ihre Exponenten einander entgegengesetzt seyn; ist daher $(a^{-n})^m = a^{-nm}$, so ist $(a^{-n})^{-m} = a^{mn}$.

Zusatz.

Es ist 1) $\left(a^{-\frac{p}{q}}\right)^{-m} = a^{\frac{mp}{q}}$, 2) $\left(a^{-n}\right)^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{q}}$, 3) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

§. 131.

Aus §. 127. — §. 130. folgt folgende allgemeine Regel: Man erhält aus einem gegebenen Dignitäten-Ausdrucke einen andern, der wieder von ihm eine Dignität darstellt, wenn man den Exponenten des gegebenen Ausdrucks nach dem Gesetze der Zahl multiplicirt, welche sagt, in welcher Dignität der gegebene Ausdruck gedacht werden soll.

§. 132.

Lehrsatz.

Eine jede Zahl b, sie sey eine ganze oder gebrochne, kann als eine Dignität einer jeden andern a angesehn werden.

Beweis.

Die Reihe, in welcher alle Dignitäten mit ganzen Exponenten von a vorkommen, ist diese:

$$\frac{1}{a^m} \cdots \frac{1}{a^4};\ \frac{1}{a^3};\ \frac{1}{a^2};\ \frac{1}{a};\ 1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ a^4 \cdots a^m.$$

Entweder ist nun a eine ganze, eine vermischte oder eine gebrochne Zahl. In den ersten beiden Fällen kömmt man von 1 nach a^m zu, zu immer grössern Zahlen, und von 1 nach $\frac{1}{a^m}$ zu immer kleinern Zahlen. Im dritten Falle geht man von 1 nach a^m durch abnehmende, und von 1 nach $\frac{1}{a^m}$ durch wachsende Zahlen. Es mag folglich a beschaffen seyn, wie sie will, so ist doch gewiss, dass man, wenn m gross genug angenommen wird, von 1 aus nach der einen Seite hin, bis zur grössten, und von 1 aus nach der andern Seite zu, bis zu der kleinsten Zahl kommen kann. Man kann aber in jener Reihe nicht von 1 zur grössten Zahl kommen, ohne durch alle dazwischen liegende Zahlen zu gehn, und eben so wenig kann man von 1 zur

zur kleinsten Zahl kommen, ohne durch alle Zahlen zu gehn, welche kleiner als 1, aber grösser als jene kleinste Zahl sind. Es sey also b eine ganze oder gebrochne Zahl, so muss sie entweder auf der einen Seite der obigen Reihe, oder auf der andern liegen, folglich muss sich auch durch die Weite von 1 zu a angeben lassen, wie weit ihre Stelle in der Reihe von 1 entfernt ist, oder welches einerlei ist, sie muss eine Dignität von a seyn. Es ist daher der allgemeine Ausdruck für b, als Dignität von a gedacht, gleich $a^{\overline{+}\frac{m}{n}}$.

§. 133.

Lehrsatz.

Die r^{te} Dignität von pqt ist mit $p^r q^r t^r$ einerlei.

Beweis.

Es sey $p = t^{\overline{+}\frac{m}{n}}$, $q = t^{\overline{+}\frac{f}{g}}$, so ist $pqt = t^{\overline{+}\frac{m}{n}} \cdot t^{\overline{+}\frac{f}{g}} \cdot t$

$$\text{oder} = t^{\overline{+}\frac{m}{n} \overline{+} \frac{f}{g} + 1}, \text{ also } (pqt)^r = \left(t^{\overline{+}\frac{m}{n} \overline{+} \frac{f}{g} + 1}\right)^r$$

$$= t^{\overline{+}\frac{m}{n} \cdot r \overline{+} \frac{f}{g} \cdot r + r} = t^{\overline{+}\frac{m}{n} \cdot r} \cdot t^{\overline{+}\frac{f}{g} \cdot r} \cdot t^r$$

$$= p^r \cdot q^r \cdot t^r$$

Es wird also das Product P zur m^{ten} Dignität erhoben, wenn man entweder sogleich das ganze P dazu erhebt oder diese Operation mit jedem einzelnen Factor von P vornimmt, und nachher die einzelnen Dignitäten dieser Factoren unter sich multiplicirt.

§. 134.

Bisher ist bloss gezeigt, wie man mit einzelnen Dignitäten-Ausdrücken rechnet, es muss daher noch gezeigt werden, nach welchen Regeln die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und die Erhebung zu Dignitäten geschieht, wenn solche Ausdrücke gegeben werden, die Summen von Dignitäten verschiedener Wurzeln sind. Wie die Addition und Subtraction

tion solcher Summen geschehn müsse, erhellet leicht aus dem vorhergehenden, es bleibt daher nur noch übrig, von ihrer Multiplication, Division und Erhebung zu Dignitäten zu sprechen.

Von der Multiplication mehrerer Summen einzelner Dignitäten - Ausdrücke.

§. 135.

1. *Aufgabe.*

Es soll $4a^2 - 6a + 9$ nach dem Gesetze der $2a + 3$ multiplicirt werden.

Auflösung.

Es ist $(4a^2 - 6a + 9).(2a + 3) = (4a^2 - 6a + 9).2a$
$+ (4a^2 - 6a + 9).3$ (§. 25.)
$= 4a^2.2a - 6a.2a + 9.2a + 4a^2.3 - 6a.3 + 9.3$
$= 8a^3 - 12a^2 + 18a + 12a^2 - 18a + 27.$
$= 8a^3 + 27.$

Man multiplicirt also $4a^2 - 6a + 9$ nach dem Gesetze der $2a + 3$, wenn man die einzelnen Theile des Multiplicands nach und nach, nach den Gesetzen der einzelnen Theile des Multiplicators multiplicirt und diese Producte zu einander addirt. Man setze daher den Multiplicator so unter das Multiplicand, daß des Multiplicators erster Theil zur Rechten unter des Multiplicands ersten Theile zur Rechten steht, und multiplicire das Multiplicand nach den Gesetzen der Theile des Multiplicators von der Rechten nach der Linken, und schreibe die einzelnen Producte so unter einander, daß allemal eines solchen Products erster Theil zur Rechten unter dem Theile des Multiplicators steht, nach dessen Gesetze es entstanden ist. Ist dieses geschehn, so suche man ihre Summe.

Wendet man dieses auf die gegebene Aufgabe an, so erhält man folgende Figur:

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 12a^2 - 18a + 27 \\ 8a^3 - 12a^2 + 18a \quad \\ \hline 8a^3 \quad * \quad * \quad + 27 \end{array}$$

2. *Aufgabe.*

Das Multiplicand sey gleich $2a^2 - 3ab - 4b^2$
Der Multiplicator sey $3a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\ 3a^2 - 2ab + b^2 \\ \hline 2a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4 \\ -4a^3b + 6a^2b^2 + 8ab^3 \quad \\ 6a^4 - 9a^3b - 12a^2b^2 \quad \quad \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4 \end{array}$$

3. *Aufgabe.*

Das Multiplicand sey $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$
Der Multiplicator $a + b + c$

$$\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^2c + b^2c + c^3 - abc - ac^2 - bc^2 \\ a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - abc - b^2c \quad \\ a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc \quad \quad \\ \hline a^3 \quad + b^3 \quad + c^3 - 3abc \end{array}$$

Um dieses Product $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ durch die Addition der einzelnen Producte zu erhalten, welche nach den Gesetzen von a, b und c entstanden sind, ist es nützlich, vorher die Theile gegen einander auszustreichen, welche sich bei der Addition ganz aufheben.

4. *Aufgabe.*

Das Multiplicand sey $a^3 + 5b + 6c$
Der Multiplicator sey $a^2 + 2b + 3c$

$a^3 +$

$$
\begin{array}{r}
a^3 + 5b + c \\
a^2 + 2b + 3c, \\
\hline
3a^3c + 15bc + 3c^2 \\
2a^3b + 10b^2 + 2bc \quad \\
a^5 + 5a^2b + a^2c \qquad\quad \\
\hline
a^5 + 2a^3b + 3a^3c + 5a^2b + a^2c + 10b^2 + 17bc + 3c^2.
\end{array}
$$

§. 136.

Wenn man die einzelnen Dignitäten-Ausdrücke, welche durch + und — verbunden, eine Formel ausmachen, Glieder nennt und sie von der Linken nach der Rechten zählt, so ist einleuchtend, daſs bei der Multiplication zweier solcher Formeln, deren Product P seyn mag, so viele einzelne Producte entstehn, die p heiſsen mögen, als der Multiplicator Glieder hat. Diese p haben mehrere Glieder, die ich mit π bezeichnen und ebenfalls von der Linken nach der Rechten zählen will, und die p selbst sollen das letzte, vorletzte u. s. w. genannt werden, nachdem sie nach dem Gesetze des letzten, vorletzten Gliedes u. s. w. des Multiplicators entstanden sind. Da nun die p bei der Multiplication so unter einander gesetzt werden, daſs allemal das letzte Glied eines jeden p, unter dem zu diesem p gehörigen Gliede des Multiplicators steht, und ein jedes p so viele π hat, als das Multiplicand Glieder besitzt, so ist klar, daſs die p so unter einander stehn, daſs das erste π des vorletzten p um eine Stelle weiter nach der Linken steht, als das erste π des letzten p, und eben so erhellet, daſs das erste π des vorvorletzten p um eine Stelle weiter nach der Linken steht, als das erste π des vorletzten p u. s. w. Werden also die p, wie sie unter einander stehn, zu einander addirt, so fängt sich das ganze P mit einem Producte des ersten Gliedes des Multiplicands nach dem Gesetze des ersten Gliedes des Multiplicators an. Wird das erste p von P subtrahirt, so bleibt eine Formel übrig, die sich mit dem Producte des ersten Gliedes des Mulplicands nach dem Gesetze des zweiten Gliedes des Multiplicators anfängt. Nimmt man hiervon das zweite p weg, so bleibt eine Formel übrig, die sich mit dem Producte des ersten

3. Beispiel.

Das Dividend $= a^2 + 2ab + b^2$.
Der Divisor $= a + b$

$$a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b$$
$$a + b$$
$$a$$
$$a^2 + ab$$
$$ab + b^2$$
$$a + b$$
$$b$$
$$ab + b^2$$

6. *Beispiel.*

Das Dividend $= 6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4$
Der Divisor $= 3a^2 - 2ab + b^2$

$$
\begin{array}{l|l}
6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4 & 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\
3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad\qquad + 2a^2 & \\
\hline
6a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 & \\
\quad - 9a^3b - 6a^2b^2 + 5ab^3 & \\
\quad 3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad\qquad - 3ab & \\
\hline
\quad - 9a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3 & \\
\qquad - 12a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \\
\qquad 3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad\qquad - 4b^2 & \\
\hline
\qquad - 12a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 &
\end{array}
$$

Von der Dignitätenerhebung solcher Wurzeln, die aus mehrern Theilen bestehn.

§. 138.

Willkührlicher Satz.

Wenn die Wurzel einer Dignität nur aus einem Theile besteht, so heisst sie eine monomische, besteht sie aus zwei Theilen, so heisst sie eine binomische, besteht sie aus drei Theilen, so wird sie eine trinomische, und wenn sie vier Theile hat, so wird sie eine quadrinomische genannt. Im allgemeinen nennt man eine jede Wurzel, die mehrere Theile hat, eine vieltheilige, oder polynomische.

§. 139.

Aufgabe.

Es wird das Quadrat der binomischen Wurzel $a + b$ verlangt.

Gliedes des Multiplicands nach dem Gesetze des dritten Gliede des Multiplicators anfängt u. s. w.

Von der Division zweier Summen einzelner Dignitäten-Ausdrücke.

§. 137.

Aufgabe.

Eine Formel, die mehrere Dignitäten-Ausdrücke enthält, nach dem Gesetze einer andern zu dividiren.

Auflösung.

Man dividirt das erste Glied des Dividends nach dem Gesetze des ersten Gliedes des Divisors, so bekömmt man den ersten Theil des Quotienten. Diesen multiplicirt man nach dem Gesetze des Divisors, und zieht das Product von dem Dividende so ab, dass man das erste Glied des erhaltenen Products von dem ersten Gliede des Dividends, das zweite Glied von dem zweiten Gliede u. s. w. subtrahirt. Mit der Formel, die nach der Subtraction übrig bleibt, verfährt man wieder so, wie man mit dem vorigen Dividende verfuhr u. s. w., so erhält man nach und nach alle Theile des Quotienten.

Beweis.

Der Zweck der Division ist, vermittelst eines gegebenen Products und des dazu gehörigen Multiplicators, das Multiplicand zu finden. Dass dieser Zweck durch das vorgeschriebene Verfahren erreicht wird, lehrt §. 136., wenn man sich denkt, dass das P dadurch entstand, dass der Multiplicator nach dem Gesetze des Multiplicands multiplicirt wurde, dass also jene p Producte des Multiplicators nach den Gesetzen der einzelnen Glieder des Multiplicands sind, folglich dass es so viele p gibt, als das Multiplicand Glieder hat.

1. Bei-

1. Beispiel.

Dividend, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \mid a^2 - 2ab + b^2$ Quot.
Divisor, $a - b$
a^2

Erstes p, $a^3 - a^2b$
Erster Rest, $-2a^2b$
Summe d. übr. p, $-2a^2b + 3ab^2 - b^3$
Divisor, $a - b$
$-2ab$

Zweites p, $-2a^2b + 2ab^2$
Zweiter Rest, $+ab^2$
Summe d. übr. p, $ab^2 - b^3$
Divisor, $a - b$
$+b^2$

Drittes p, $+ab^2 - b^3$
Dritter Rest, $0 \quad 0$

2. Beispiel.

Es sey das Dividend $= 2a^2 + a - 6$
Der Divisor $= 2a - 3$

$2a^2 + a - 6 \mid a + 2$
$2a - 3$
a

$2a^2 - 3a$
$+ 4a - 6$
$2a - 3$
$+ 2$

$4a - 6$

3. Bei-

3. *Beispiel.*

Das Dividend $= a^2 + 2ab + b^2$,
Der Divisor $= a + b$

$a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b$
$a + b$
a
$\overline{a^2 + ab}$
$ab + b^2$
$a + b$
b
$\overline{ab + b^2}$

4. *Beispiel.*

Das Dividend $= 8a^3 + 27$
Der Divisor $= 4a^2 - 6a + 9$

$8a^3 + 27$
$4a^2 - 6a + 9$
$2a$
$\overline{8a^3 - 12a^2 + 18a}$
$+ 12a^2 - 18a + 27$
$4a^2 - 6a + 9$
3
$\overline{+ 12a^2 - 18a + 27}$

5. *Beispiel.*

Das Dividend $= 4a^8x^4 - 9b^8y^4$
Der Divisor $= 2a^4x^2 + 3b^4y^2$;

$4a^8x^4 - 9b^8y^4 \mid 2a^4x^2 - 3b^4y^2$
$2a^4x^2 + 3b^4y^2$
$+ 2a^4x^2$
$\overline{4a^8x^4 + 6a^4b^4x^2y^2}$
$- 6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4$
$2a^4 \; x^2 + 3b^4y^2$
$- 3b^4y^2$
$\overline{- 6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4}$

6. *Bei-*

6. *Beispiel.*

Das Dividend $= 6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4$
Der Divisor $= 3a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{l|l}
6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4 & 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\
3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad + 2a^2 & \\
\hline
6a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 & \\
\quad - 9a^3b - 6a^2b^2 + 5ab^3 & \\
\quad 3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad - 3ab & \\
\hline
- 9a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3 & \\
\quad - 12a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \\
\quad 3a^2 - 2ab + b^2 & \\
\qquad - 4b^2 & \\
\hline
- 12a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 &
\end{array}$$

Von der Dignitätenerhebung solcher Wurzeln, die aus mehrern Theilen bestehn.

§. 138.

Willkührlicher Satz.

Wenn die Wurzel einer Dignität nur aus einem Theile besteht, so heisst sie eine monomische, besteht sie aus zwei Theilen, so heisst sie eine binomische, besteht sie aus drei Theilen, so wird sie eine trinomische, und wenn sie vier Theile hat, so wird sie eine quadrinomische genannt. Im allgemeinen nennt man eine jede Wurzel, die mehrere Theile hat, eine vieltheilige, oder polynomische.

§. 139.

Aufgabe.

Es wird das Quadrat der binomischen Wurzel $a + b$ verlangt.

Auflösung.

Man erhält das verlangte Quadrat, wenn man die binomische Wurzel $a + b$ nach ihrem eigenen Gesetze multiplicirt.

Es ist also $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
folglich auch $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

1. Zusatz.

Wird A gleich $a + b$ und B gleich c gesetzt, so wird aus $(A + B)^2$ der Ausdruck $(a + b + c)^2$, und aus $A^2 + 2AB + B^2$ wird $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$, oder es ist

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$

folglich ist auch

$$(A + B + C)^2 = A^2 + 2AB + B^2 + 2(A + B)C + C^2$$

2. Zusatz.

Setzt man in der letzten Formel $A = a + b$, $B = c$ und $C = d$, so bekömmt man $(a + b + c + d)^2 =$
$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$

Daher auch $(A + B + C + D)^2 =$
$A^2 + 2AB + B^2 + 2(A + B)C + C^2 + 2(A + B + C)D + D^2$

3. Zusatz.

Setzt man in dieser letzten Formel $A = a + b$, $B = c$, $C = d$ und $D = e$, so verwandelt sie sich in diese:

$$(a + b + c + d + e)^2 =$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + 2(a + b + c + d)e + e^2$$

4. Zusatz.

Wenn man die Formeln betrachtet, welche zu $(a + b)^2$, $(a + b + c)^2$, $(a + b + c + d)^2$ und $(a + b + c + d + e)^2$ gehören, so wird man leicht ein allgemeines Gesetz wahrnehmen, was für die Formel des Quadrats einer jeden vieltheiligen Wurzel gilt.

Das allgemeine Gesetz ist dieses:

Das erste Glied, ist das Quadrat des ersten Theils der Wurzel.

Das zweite Glied ist das doppelte Product des ersten Theils nach dem Gesetze des zweiten Theils.

Das dritte Glied ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

Das vierte Glied ist das zwiefache Product der Summe des ersten beiden Theile nach dem Gesetze des dritten Theils.

Das fünfte Glied ist das Quadrat des dritten Gliedes.

Das sechste Glied ist das zwiefache Product der Summe der ersten drei Theile nach dem Gesetze des vierten.

Das siebente Glied ist das Quadrat des vierten Theils u. s. w.

Die graden Glieder enthalten also die zwiefachen Producte, und die ungraden Glieder enthalten die Quadrate der einzelnen Theile.

§. 140.

Aufgabe.

Es wird der Würfel der binomischen Wurzel $a + b$ verlangt.

Auflösung.

Man erhält den Würfel von $a + b$, wenn man das Quadrat von $a + b$ nach dem Gesetze der $a + b$ multiplicirt.

Es ist also $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

folglich auch $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

1. *Zusatz.*

Wird $A = a + b$ und $B = c$ gesetzt, so wird aus $(A + B)^3$ der Ausdruck $(a + b + c)^3$ und aus $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ wird $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$;

oder es ist $(a + b + c)^3 =$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3,$$

folglich ist auch $(A + B + C)^3 =$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + 3(A + B)^2C + 3(A + B)C^2 + C^3.$$

2. *Zusatz.*

Setzt man in der letzten Formel $A = a + b$, $B = c$ und $C = d$, so bekömmt man:

$$(a+b+c+d)^3 =$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$+ 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3.$$

Daher auch $(A+B+C+D)^3 =$
$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + 3(A+B)^2C + 3(A+B)C^2 + C^3$$
$$+ 3(A+B+C)^2D + 3(A+B+C)D^2 + D^3$$

3. *Zusatz.*

Wird in dieser Formel $A = a+b$, $B = c$, $C = d$ und $D = e$ gesetzt, so verwandelt sie sich in diese:
$$(a+b+c+d+e)^3 =$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$+ 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$
$$+ 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3.$$

4. *Zusatz.*

Wenn man die Formeln betrachtet, welche zu $(a+b)^3$, $(a+b+c)^3$, $(a+b+c+d)^3$ und $(a+b+c+d+e)^3$ gehören, so nimmt man folgendes allgemeines Gesetz für die Würfel einer jeden vieltheiligen Wurzel wahr:

Das erste Glied ist der Würfel des ersten Theils der Wurzel.

Das zweite Glied ist das dreifache Product des Quadrats des ersten Theils der Wurzel, nach dem Gesetze des zweiten Theils.

Das dritte Glied ist das dreifache Product des ersten Theils der Wurzel, nach dem Gesetze des Quadrats des zweiten Theils.

Das vierte Glied ist der Würfel des dritten Theils der Wurzel.

Das fünfte Glied ist das dreifache Product des Quadrats der Summe der ersten beiden Theile der Wurzel, nach dem Gesetze des dritten Theils.

Das sechste Glied ist das dreifache Product der Summe der ersten beiden Theile der Wurzel, nach dem Gesetze des Quadrats des dritten Theils.

Das siebente Glied ist der Würfel des dritten Theils der Wurzel.

Das

Das achte Glied ist das dreifache Product des Quadrats der Summe der ersten drei Theile der Wurzel, nach dem Gesetze des vierten.

Das neunte Glied ist das dreifache Product der Summe der ersten drei Theile der Wurzel, nach dem Gesetze des Quadrats des vierten.

U. s. w.

§. 141.

Aufgabe.

Es wird eine Formel für das Biquadrat von a + b verlangt.

Auflösung.

Die verlangte Formel wird erhalten, wenn man $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nach dem Gesetze der a + b multiplicirt, folglich ist

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Zusatz.

Eben so kann man aus der vierten, die fünfte, aus der fünften, die sechste, aus der sechsten, die siebente Dignität finden u. s. w.

Allgemeines Gesetz einer jeden Dignität mit einem ganzen Exponenten von der binomischen Wurzel a + b.

§. 142.

Wenn man die Formeln für die zweite, dritte, vierte und fünfte Dignität von a + b betrachtet; so findet man zwei Gesetze, die für alle vier Dignitäten passen.

Das erste Gesetz betrifft die Ordnung und die Form, in welcher die einzelnen Theile der Wurzel a + b in den Formeln ihrer Dignitäten vorkommen. Das zweite Gesetz bezieht sich auf die Coefficienten der einzelnen Glieder der Formeln.

Das erste Gesetz ist dieses:

Das erste Glied ist a in der Dignität, zu welcher a + b erhoben ist. Das letzte Glied ist b in der nämlichen Potenz.

In allen übrigen Gliedern finden sich Dignitäten von a nach den Gesetzen von Dignitäten von b multiplicirt, und zwar die Dignitäten von a kommen nach dem Gesetze vor, dass der Exponent von a im zweiten Gliede um 1 kleiner ist, als in dem ersten Gliede, im dritten Gliede wieder um 1 kleiner, als in dem zweiten u. s. f., so dass im vorletzten Gliede a in der ersten Dignität vorkömmt.

Hingegen die Dignitäten von b schreiten in der nämlichen Ordnung von der Rechten nach der Linken fort, so dass sich im zweiten Gliede b in der ersten Dignität befindet.

Es ist also in einem jeden einzelnen Gliede die Summe der Exponenten von a und des Exponenten von b, gleich dem Exponenten der Dignität, zu welcher a + b erhoben ist, und folglich hat eine jede Formel jener Dignitäten ein Glied mehr, als die Zahl Einheiten besitzt, welche sagt, in welcher Dignität a + b gedacht wird.

Das zweite Gesetz ist dieses:

Der erste Coefficient ist gleich 1. Der zweite Coefficient ist gleich dem Exponenten von a im ersten Gliede. Der dritte Coefficient ist gleich einem Producte des zweiten Coefficienten nach dem Gesetze eines Quotienten, der den Exponenten von a des zweiten Gliedes zum Dividend und 1 . 2 zum Divisor hat. Der vierte Coefficient ist gleich dem dritten, multiplicirt nach dem Gesetze eines Quotienten, der den Exponenten von a des dritten Gliedes zum Dividend und 3 zum Divisor hat. Der fünfte Coefficient ist ein Product des vierten Coefficienten, multiplicirt nach dem Gesetze eines Quotienten, der den Exponenten von a des vierten Gliedes zum Dividend und 4 zum Divisor hat u. s. w.

§. 143.

Das Gesetz, nach welchem a und b, und das Gesetz, nach welchem die Coefficienten in einer Formel für eine Dignität von a + b vorkommen, sind die einzigen, die darin vorkommen können. Wären also die beiden in §. 142. angeführten Gesetze für jede Dignität von a + b wahr, so würde man leicht eine Formel für eine jede Dignität mit einem ganzen Exponenten aufsetzen können, ohne erst nöthig zu haben, sie auf dem

dem gewöhnlichen Wege, nämlich durch die Multiplication, zu suchen. Aus diesem Grunde soll untersucht werden, ob jene zwei Gesetze für alle Dignitäten von a + b gelten.

Da nun dieses der Fall ist, wenn gezeigt werden kann, dass wenn die Gesetze für irgend eine Dignität von a + b wahr sind, dass sie alsdann auch für die nächsthöhere wahr seyn müssen, weil nämlich schon ihre Richtigkeit für die zweite, dritte und vierte Dignität gezeigt ist, so soll auch dieses der Gesichtspunkt seyn, der bei dem Beweise zum Grunde gelegt wird.

Untersuchung, ob das erste Gesetz für alle Dignitäten von a + b wahr sey.

§. 144.

Gesetzt, es wäre das erste Gesetz für die m^{te} Dignität wahr, so ist $(a+b)^m =$

$$a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + \cdots + Pa^2b^{m-2} + Qab^{m-1} + b^m$$

(A, B - - - - P, Q, werden hier noch als unbekannte Coefficienten angesehn.)

Wird diese Formel nach dem Gesetze der a + b multiplicirt, so erhält man die nächst höhere, nämlich die $m+1^{te}$ Dignität von a + b. Bei dieser Multiplication müssen alle Glieder der Formel für $(a+b)^m$ nach den Gesetzen der a und b multiplicirt werden, woraus also die beiden Producte $(a+b)^m a$ und $(a+b)^m b$ entstehn, deren Summe $(a+b)^{m+1}$ gibt. Wird aber die Formel für $(a+b)^m$ nach dem Gesetze der a multiplicirt, so wird aus ihr:

$$a^{m+1} + Aa^m b + Ba^{m-1}b^2 + \cdots + Pa^3b^{m-2} + Qa^2b^{m-1} + ab^m,$$

und wird sie nach dem Gesetze der b multiplicirt, so erhält man:

$$a^m b + Aa^{m-1}b^2 + \cdots + Pa^2b^{m-1} + Qab^m + b^{m+1}.$$

Die beiden Producte zu einander addirt, geben:

$$a^{m+1} + (1+A)a^m b + (A+B)a^{m-1}b^2 + \cdots + (P+Q)a^2b^{m-1}$$
$$+ (Q+1)ab^m + b^{m+1} = (a+b)^{m+1}.$$

Da

Da nun in dieser Formel das erste Gesetz ebenfalls Statt findet, so ist bewiesen, daſs wenn es für irgend eine Dignität mit einem ganzen Exponenten wahr sey, daſs es alsdenn auch für die nächsthöhere wahr seyn müſse. Nun gilt es aber für die erste, zweite, dritte und vierte Dignität von $a+b$, folglich auch für alle höhere Dignitäten.

1. Zusatz.

Aus der Formel, die für $(a+b)^{m+1}$ gefunden ist, erhellet, daſs man den n^{ten} Coefficienten der $m+1^{ten}$ Dignität von $a+b$ erhält, wenn man zu den n^{ten} Coefficienten der m^{ten} Dignität von $a+b$, den $n-1^{ten}$ der nämlichen Dignität addirt.

2. Zusatz.

Da das erste Gesetz für alle Dignitäten mit ganzen Exponenten wahr ist, so hat eine jede solcher Dignitäten-Formeln ein Glied mehr, als der höchste Exponent von a Einheiten hat. Es hat also die m^{te} Dignität von $a+b$, $m+1$ Glieder.

Untersuchung, ob das zweite Gesetz für alle Dignitäten von a+b wahr sey.

§. 145.

Es sey das zweite Gesetz für den n^{ten} Coefficienten der m^{ten} Dignität von $a+b$ wahr, so ist er gleich

$$\frac{m.m-1.m-2 \text{------} ((m-(n-3))((m-(n-2))}{1.2.3 \text{---------} n-2.n-1} = Q.$$

Es sey auch für den $n-1^{ten}$ Coefficienten wahr, so ist er gleich $\frac{m.m-1.m-2 \text{-----} ((m-(n-4))((m-(n-3)}{1.2.3 \text{-------} n-3.n-2} = P$,

folglich müſste nach §. 144. 1. Zus. der n^{te} Coefficient der $m+1^{ten}$ Dignität von $a+b$ gleich $P+Q$ seyn.

Aber wenn man Q mit P vergleicht, so findet man, daſs Q aus P entsteht, wenn man P nach dem Gesetze der $\frac{m-(n-2)}{n-1}$ mul-

multiplicirt, folglich ist $Q = \frac{P((m-(n-2))}{n-1}$, und daher $P+Q = P + \frac{P((m-(n-2))}{n-1}$. Bringt man diese beiden Ausdrücke unter einerlei Benennung, so erhält man:

$$P+Q = \frac{nP-P}{n-1} + \frac{P((m-(n-2))}{n-1}, \text{ oder}$$

$$P+Q = \frac{nP-P+P((m-(n-2))}{n-1}$$

$$= \frac{((n-1+m-(n-2))P}{n-1}$$

$$= \frac{(n-1+m-n+2)P}{n-1}$$

$$= \frac{-1+m+2}{n-1} \cdot P = \frac{m+1}{n-1} \cdot P.$$

Substituirt man in $\frac{m+1}{n-1} \cdot P$, für P den gleichgültigen obigen Ausdruck, so ist $P+Q$

$$= \frac{m.m-1.m-2 \cdots ((m-(n-4))((m-(n-3))}{1.2.3 \cdots n-3.n-2} \cdot \frac{m+1}{n-1}$$

$$= \frac{m+1.m.m-1.m-2 \cdots ((m-(n-4))((m-(n-3))}{1.2.3.4 \cdots n-2.n-1}.$$

Um desto leichter einsehn zu können, ob in diesem n^{ten} Coefficienten der $m+1^{ten}$ Dignität von $a+b$, das Gesetz liegt, was sich nach der Voraussetzung in dem n^{ten} und dem $n-1^{ten}$ Gliede der m^{ten} Dignität von $a+b$ befindet, setze man $m+1 = M$, so ist

$$P+Q = \frac{M.M-1.M-2 \cdots ((M-(n-3))((M-(n-2))}{1.2.3 \cdots n-2.n-1}.$$

Da nun dieser Coefficient das nämliche Gesetz enthält, was in dem n^{ten} Coefficienten der m^{ten} Dignität von $a+b$ befind-lich

lich ist, so folgt, daſs wenn das zweite Gesetz für den n^{ten} und $n-1^{ten}$ Coefficienten irgend einer Dignität eines ganzen Exponenten von $a+b$ statt findet, daſs es alsdann auch für den n^{ten} Coefficienten aller höhern Dignitäten gelten müsse. Es gilt aber für alle Glieder der vierten Dignität, folglich da diese fünf Glieder hat, so ist das zweite Gesetz für die fünf ersten Coefficienten aller Dignitäten eines ganzen Exponenten wahr.

Hieraus folgt also noch nicht, daſs das zweite Gesetz für alle Coefficienten einer jeden Dignität wahr sey. Es läſst sich aber leicht zeigen, daſs wenn es für den $m-1^{ten}$ Coefficienten der m^{ten} Dignität wahr ist, daſs es alsdann auch für den m^{ten} und $m+1^{ten}$ Coefficienten der m^{ten} Dignität gelten müsse, d. h. wenn das Gesetz für den vorvorletzten Coefficienten richtig ist, so ist es auch für den vorletzten und letzten wahr. Ist aber dieſs bewiesen, so ist einleuchtend, daſs die Allgemeinheit des zweiten Gesetzes dargethan sey, weil schon bewiesen ist, daſs es für die ersten 5 Coefficienten einer jeden Dignität eines ganzen Exponenten paſst. Denn nun paſst es auch für alle Coefficienten der 6ten und 7ten und aus diesem Grunde wieder für alle Coefficienten der 8ten und 9ten Dignität u. s. w.

Um zu zeigen, daſs wenn das Gesetz für den $m-1^{ten}$ Coefficienten der m^{ten} Dignität richtig ist, daſs es alsdenn auch für den m^{ten} und $m+1^{ten}$ richtig sey, will ich vorher den wahren Werth dieser Coefficienten auf folgende Weise bestimmen:

Es ist $(a+b)^m$ das umgekehrte von $(b+a)^m$, oder welches einerlei ist, man hat die Formel für $(b+a)^m$, wenn man die Glieder der Formel für $(a+b)^m$, von der Rechten nach der Linken betrachtet. Es entsteht aber aus $(a+b)^m$ die Formel für $(b+a)^m$, wenn man in der für $(a+b)^m$, statt a, den Buchstaben b, und statt b, den Buchstaben a setzt; folglich da die Coefficienten bei dieser Substitution unverändert bleiben, so ist einleuchtend, daſs die Coefficienten in $(b+a)^m$ den Coefficienten in $(a+b)^m$ gleich sind, und daſs sie in $(b+a)^m$ auf einander folgen, wie in $(a+b)^m$; oder welches einerlei ist, daſs die Coefficienten-Reihe in $(a+b)^m$ immer die nämliche sey, man mag sie von der Linken nach der Rechten,

ten, oder von der Rechten nach der Linken lesen. Aus diesem Grunde müssen die Coefficienten der äussersten Glieder und die, welche von den beiden äussersten gleich weit entfernt sind, unter sich gleich seyn. Da nun die Richtigkeit des zweiten Gesetzes schon für die ersten fünf Glieder einer jeden Dignität von $a + b$ bewiesen ist, so ist der erste Coefficient gleich 1, der zweite gleich m und der dritte gleich $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$, folglich muss auch der letzte gleich 1, der vorletzte gleich m und der vorvorletzte gleich $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$ seyn.

Nun die Werthe für die drei letzten Coefficienten bestimmt sind, lässt sich folgendermassen die Richtigkeit des zweiten Gesetzes für die beiden letzten Coefficienten zeigen, wenn es für den vorvorletzten wahr ist.

Es erhellet aus obigen p. 156, dass wenn das Gesetz für den $n-1^{ten}$ Coefficienten P wahr ist, dass es alsdenn auch für den n^{ten} Coefficienten Q wahr sey, wenn $Q = \frac{P((m-(n-2))}{n-1}$. Wird also angenommen, das Gesetz sey für den $m-1^{ten}$ Coefficienten wahr, und es soll nun für den m^{ten} Coefficienten gelten, so muss $m = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\left(\left(\frac{m-(m-2)}{m-1}\right)\right.$ seyn. (Hier ist nämlich $Q = m$, $P = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$ und $n = m$). Es ist aber

$$m \cdot \frac{m-1}{1 \cdot 2}\left(\left(\frac{m-(m-2)}{m-1}\right)\right. = \frac{m \cdot m-1 \cdot (m-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot m-1 \cdot} =$$

$\frac{m \cdot m-1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot m-1} = m$, folglich ist auch das Gesetz für den m^{ten} Coefficienten richtig, sobald es für den $m-1^{ten}$ gilt.

Soll nun hieraus, dass es unter der angenommenen Bedingung für den m^{ten} Coefficienten passt, auch folgen, dass es für den $m+1^{ten}$ wahr sey, so muss $1 = \frac{m((m-(m-1))}{m}$ seyn.

seyn. (Hier ist $Q = 1$, $P = m$ und $n = m + 1$.) Da nun würklich $\frac{m.((m-(m-1))}{m} = \frac{m(m-m+1)}{m} = 1$ ist, so ist klar, daſs das zweite Gesetz für den $m+1^{ten}$ richtig sey, so bald es für den m^{ten} paſst. Gilt also das Gesetz für den $m-1^{ten}$ Coefficienten, so gilt es auch für den m^{ten}, und aus diesem Grunde auch für den $m+1^{ten}$.

§. 146.

Zusatz.

Es ist also nach §. 144. und §. 145., die allgemeinste Formel für die m^{te} Dignität von $a+b$ folgende:

$$(a+b)^m =$$

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots + mab^{m-1} + b^m.$$

Neuntes Kapitel.

Von der Rechnung mit den Wurzelgröſsen und der Ausziehung der Wurzeln.

I. Von der Rechnung mit den Wurzelgröſsen.

§. 147.

1. Erklärung.

Es wird oft durch eine Aufgabe verlangt, daſs man die Wurzel einer gegebenen Dignität bestimmen soll. Es kann aber eine jede Zahl als eine Dignität von beliebigem Grade angesehn werden, so kann man z. B. p für eine Dignität vom m^{ten} Grade ansehn, weil man sich immer zwischen 1 und p, m gleiche Weiten denken kann, deren Gröſse alsdann durch die Wurzel bestimmt wird; es kann also in einer Aufgabe verlangt werden, daſs man die Wurzel der m^{ten}, und in einer an-

andern, dass man die Wurzel der n^{ten} Dignität von p finden soll. Die Handlung, wodurch dieses geschieht, heisst Wurzelausziehn. Sieht man eine Zahl für ein Quadrat an, und sucht die Wurzel, so zieht man aus ihr die Quadratwurzel. Sieht man eine Zahl für einen Würfel an und sucht die Wurzel, so zieht man die Kubikwurzel aus u. s. w. Kurz, sucht man vermittelst p eine Zahl, welche zur m^{ten} Dignität erhoben, diese Zahl p gibt, so zieht man aus p die Wurzel der m^{ten} Dignität.

Willkührlicher Satz.

Um anzuzeigen, dass man aus q die Wurzel der m^{ten} Dignität ziehn, oder dass man sich die Wurzel der m^{ten} Dignität von q denken soll, setzt man vor q das Zeichen $\sqrt{\;}$, und schreibt oben in die Oeffnung den Buchstaben m. Also das Zeichen $\sqrt[m]{q}$ zeigt an, dass man sich die Wurzel der m^{ten} Dignität von q denkt, oder dass q für eine Dignität vom m^{ten} Grade angesehn wird, und dass man eine Zahl x sucht, welche zur m^{ten} Dignität erhoben, q gibt.

2. Erklärung.

Ein solcher Ausdruck wie $f\sqrt[m]{g}$ wird Wurzelgrösse genannt. f heisst ihr Coefficient und sagt, wie oft $\sqrt[m]{g}$ gedacht wird; m ist der Wurzelexponent und g wird die Grösse unter dem Wurzelzeichen genannt. Ist der Wurzelexponent gleich 2, so wird er nicht angezeigt. Besteht die Grösse unter dem Wurzelzeichen aus mehrern Theilen, so muss sie eingeklammert werden, z. B. $\sqrt[n]{(a+b-c)}$.

Zusatz.

Der Ausdruck $\sqrt[2m]{-q}$ hat keinen reellen Werth. Denn $\sqrt[2m]{-q}$ sagt, dass man sich $-q$ als die $2m^{te}$ Dignität denken soll. Eine solche Dignität gibt es aber nicht (§. 108. 2. Zus.), folglich kann auch $\sqrt[2m]{-q}$ keinen möglichen Werth haben; daher

her nennt man auch einen solchen Ausdruck eine **unmögliche Grösse** oder **eingebildete Wurzelgrösse.**

§. 148.

Lehrsatz.

Es ist $\sqrt[\frac{m}{n}]{p^{\frac{q}{r}}}$ mit $p^{\frac{q}{r}:\frac{m}{n}}$ einerlei.

Beweis.

Der Ausdruck $\sqrt[\frac{m}{n}]{p^{\frac{q}{r}}}$ zeigt die Wurzel der $\frac{m}{n}$ten Dignität von $p^{\frac{q}{r}}$ an, also eine Zahl, die, zur $\frac{m}{n}$ten Dignität erhoben, $p^{\frac{q}{r}}$ gibt. Aber auch $p^{\frac{q}{r}:\frac{m}{n}}$ gibt, zur $\frac{m}{n}$ten Dignität erhoben, $p^{\frac{q}{r}}$, folglich sind $\sqrt[\frac{m}{n}]{p^{\frac{q}{r}}}$ und $p^{\frac{q}{r}:\frac{m}{n}}$ gleichbedeutende Ausdrücke.

1. *Zusatz.*

Es ist $f\sqrt[\frac{m}{n}]{p^{\frac{q}{r}}} = f\,p^{\frac{q}{r}:\frac{m}{n}}$,

Oder es ist eine Wurzelgrösse mit einer Dignität gleichgültig, die man erhält, wenn man den Exponenten der Grösse unter dem Wurzelzeichen nach dem Gesetze des Wurzelexponenten dividirt, und zu dieser erhaltenen Dignität den Coefficienten der Wurzelgrösse, als ihren Coefficienten fügt.

2. *Zusatz.*

Für $ma^{\frac{p}{q}}$ kann der Ausdruck $m\sqrt[q]{a^p}$ substituirt werden, weil sich $m\sqrt[q]{a^p}$, nach dem ersten Zusatze, ohne Veränderung des

des Werths in $ma^{\frac{p}{q}}$ verwandeln läſst. Es läſst ſich alſo eine jede Dignität mit gebrochnen Exponenten, als eine Wurzelgröſſe darſtellen, die entſteht, wenn man zwiſchen die Dignität und ihren Coefficienten das Wurzelzeichen ſetzt, ihrem Exponenten den Nenner nimmt und dieſen zum Wurzelexponenten macht. Zugleich erhellet hieraus, daſs der Werth einer jeden Dignität von a mit einem gebrochnen Exponenten $\frac{p}{q}$ angegeben werden kann, wenn man die Wurzel der q^{ten} Dignität aus a^p zu finden weiſs.

3. Zuſatz.

Es iſt $m\sqrt[p]{a^q} = ma^{\frac{q}{p}} = ma^{\frac{rq}{rp}} = m\sqrt[rp]{a^{rq}}$. Eine Wurzelgröſse behält alſo ihren Werth, wenn man den Wurzelexponenten und den Exponenten der Gröſse unter dem Wurzelzeichen nach dem Geſetze einer und derſelben Zahl multiplicirt.

4. Zuſatz.

Es iſt $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[mq]{a^{pm}}$. Man kann alſo eine Wurzelgröſse, deren Wurzelexponent; oder Exponent der Gröſse unter dem Wurzelzeichen, oder deren Wurzelexponent und Exponent der Gröſse unter dem Wurzelzeichen zugleich gebrochne Zahlen ſind, in eine andere verwandeln, deren Exponenten ganze Zahlen ſind.

Zuſatz.

Es iſt $m\sqrt[p]{a^q} = ma^{\frac{q}{p}} = ma^{\frac{q:r}{p:r}} = m\sqrt[p:r]{a^{q:r}}$. Es bleibt daher auch eine Wurzelgröſse unverändert, wenn man den Wurzelexponenten und den Exponenten der Gröſse unter dem Wurzelzeichen nach dem Geſetze einer und der nämlichen Zahl dividirt.

6. Zuſatz.

Es iſt $\sqrt[mp]{a^{pq}} = \sqrt[m]{a^q}$. Sind daher der Wurzelexponent und der Exponent der Gröſse unter dem Wurzelzeichen unter

sich zusammengesetzte Zahlen, so lassen sich diese Exponenten, ohne Veränderung des Werths der Wurzelgrösse, durch kleinere Zahlen ausdrücken.

7. Zusatz.

Es ist $\sqrt[m]{g^m} = \sqrt[m:m]{g^{m:m}} = g$. Wenn also der Wurzelexponent und der Exponent der Grösse unter dem Wurzelzeichen unter sich gleich sind, so ist die Wurzelgrösse mit der Grösse unter dem Wurzelzeichen gleichgültig, wenn man dieser den Exponenten 1 gibt. Hieraus erhellet auch, dass man einer jeden ganzen Zahl, ohne Veränderung ihres Werths, die Form einer Wurzelgrösse mit willkührlich angenommenen Wurzelexponenten geben kann.

§. 149.

Erklärung.

Wurzelgrössen heissen gleichnamige, wenn sie einerlei Wurzelexponenten haben; ungleichnamige werden sie genannt, wenn sie unter sich verschiedene Wurzelexponenten haben.

§. 150.

Aufgabe.

Ungleichnamige Wurzelgrössen in ihnen gleichgültige gleichnamige zu verwandeln.

Auflösung.

Man sehe bei einer jeden Wurzelgrösse, den Exponenten der Grösse unter dem Wurzelzeichen, für den Zähler, und den Wurzelexponenten für den Nenner einer gebrochnen Zahl an, und bringe diese gebrochnen Zahlen unter einerlei Benennung. Ist dieses geschehn, so sind die Wurzelgrössen gleichnamig, ohne dass dadurch ihr Werth verändert ist. (§. 148. 3. Zus. 5. Zus.)

Beispiel.

Es sollen $3\sqrt[3]{8}$, $5\sqrt[4]{7^3}$ und $2\sqrt[5]{7^9}$ zu gleichnamigen gemacht werden.

Die

Die verlangten gleichnamigen Wurzelgröſsen sind:

$$3\sqrt[60]{8^{20}},\ 5\sqrt[60]{7^{45}},\ 2\sqrt[60]{7^{108}}.$$

§. 151.

Lehrſatz.

Es iſt $\sqrt[m]{pqr} = \sqrt[m]{p} \cdot \sqrt[m]{q} \cdot \sqrt[m]{r}$.

Beweis.

Es iſt $\sqrt[m]{pqr} = (pqr)^{\frac{1}{m}} = p^{\frac{1}{m}} \cdot q^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}}$ (§. 133.)

$$= \sqrt[m]{p} \cdot \sqrt[m]{q} \cdot \sqrt[m]{r}.$$

Alſo die Wurzel eines Producłs iſt gleich dem Producłe der Wurzeln der Facłoren.

1. Zuſatz.

Es iſt $\sqrt[m]{a^m p} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{p} = a\sqrt[m]{p}$. Wenn ſich daher unter dem Wurzelzeichen ein Facłor in der Dignität des Wurzelexponenten befindet, ſo kann ſeine Wurzel als Facłor vor das Wurzelzeichen geſetzt werden.

Beiſpiele.

1. $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$.
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$.
3. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$.

2. Zuſatz.

Es iſt $m\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot m^q}$. Soll daher der Coefficient als Facłor unter das Wurzelzeichen gebracht werden, ohne daſs dadurch der Werth der Wurzelgröſse verändert wird, ſo muſs man ihn vorher zu der Dignität des Wurzelexponenten erheben.

§. 152.

Lehrsatz.

$$\text{Es ist } \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{Z}{N}} = \frac{\sqrt[\frac{n}{m}]{Z}}{\sqrt[\frac{n}{m}]{N}}.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{Z}{N}} = \left(\frac{Z}{N}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{Z^{\frac{m}{n}}}{N^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[\frac{n}{m}]{Z}}{\sqrt[\frac{n}{m}]{N}}.$$

Man zieht alſo aus einer gebrochnen Zahl die Wurzel der $\frac{n}{m}$ten Dignität, wenn man ſie ſowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner zieht.

1. Zuſatz.

$$\text{Es ist } \sqrt[m]{\frac{Z}{N^m}} = \frac{\sqrt[m]{Z}}{\sqrt[m]{N^m}} = \frac{\sqrt[m]{Z}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sqrt[m]{Z}.$$

2. Zuſatz.

$$\text{Es ist } \sqrt[m]{\frac{Z^m}{N^r}} = \frac{\sqrt[m]{Z^m}}{\sqrt[m]{N^t}} = \frac{Z}{\sqrt[m]{N^r}} = Z \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{N^r}} = Z \cdot \frac{1}{N^{\frac{r}{m}}}$$

$$= Z \cdot N^{-\frac{r}{m}} = Z\sqrt[m]{N^{-r}} = Z\sqrt[m]{\frac{1}{N^r}}.$$

3. Zuſatz.

$$\text{Es ist } Z^{-\frac{r}{n}} = Z^{\frac{-r}{n}} = \sqrt[n]{Z^{-r}} = \sqrt[n]{\frac{1}{Z^r}} = \frac{1}{\sqrt[n]{Z^r}}.$$

Es

Es ist aber auch $Z^{-\frac{r}{n}} = Z^{\frac{r}{-n}} = \sqrt[-n]{Z^r}$, folglich ist auch $\sqrt[-n]{Z^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{Z^r}}$.

Oder wenn eine Wurzelgröſse einen negativen Wurzelexponenten hat, der Exponent der Gröſse unter dem Wurzelzeichen aber positiv ist, so ist sie einer gebrochnen Zahl gleichgültig, die zum Zähler die Einheit und zum Nenner die gegebene Wurzelgröſse hat, wenn man dieser einen positiven Wurzelexponenten gegeben hat.

4. *Zusätz.*

Es ist $\sqrt[-n]{Z^{-r}} = Z^{\frac{-r}{-n}} = Z^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{Z^r}$. Hat also eine Wurzelgröſse einen negativen Wurzelexponenten und auch der Exponent der Gröſse unter dem Wurzelzeichen ist negativ, so wird ihr Werth nicht verändert, wenn man die genannten Exponenten positiv nimmt

Addition der Wurzelgröſsen.

§. 153.

Aufgabe.

Es soll ein Ausdruck gefunden werden, der $m\sqrt[n]{a^p}$, $q\sqrt[n]{a^p}$ und $r\sqrt[n]{a^p}$ vereinigt darstellt.

Auflösung.

Es ist $m\sqrt[n]{a^p} + q\sqrt[n]{a^p} + r\sqrt[n]{a^p} = ma^{\frac{p}{n}} + qa^{\frac{p}{n}} + ra^{\frac{p}{n}}$

$= (m + q + r)a^{\frac{p}{n}}$.

Nun ist aber $(m + q + r)a^{\frac{p}{n}} = (m + q + r)\sqrt[n]{a^p}$, folglich ist

ist auch $m\sqrt[n]{a^p} + q\sqrt[n]{a^p} + r\sqrt[n]{a^p} = (m+q+r)\sqrt[n]{a^p}$. Man addirt also mehrere gleichnamige Wurzelgrösen, die unter dem Wurzelzeichen einerlei Grösse haben, wenn man den gemeinschaftlichen Wurzelausdruck hinschreibt und diesen einen Coefficienten gibt, der gleich der Summe der Coefficienten der zu einander addirenden Wurzelgrösen ist.

1. *Zusatz.*

Die Ausdrücke $\sqrt[m]{a^m b^n}$, $\sqrt[m]{c^m b^n}$ und $\sqrt[m]{d^m b^n}$, sind den Ausdrücken $a\sqrt[m]{b^n}$, $c\sqrt[m]{b^n}$ und $d\sqrt[m]{b^n}$ gleichgültig, daher ist auch ihre Summe gleich $(a+c+d)\sqrt[m]{b^n}$. Werden also gleichnamige Wurzelgrösen gegeben, die unter dem Wurzelzeichen verschiedene Grösse haben, so untersuche man, ob sie sich vermittelst §. 151. 1. Zus. in andere verwandeln lassen, die unter dem Wurzelzeichen einerlei Grösse haben. Ist dieses möglich, so nehme man diese Verwandlung vor, so können sie nach der vorhin gegebenen Vorschrift addirt werden.

2. *Zusatz.*

Die Ausdrücke $n\sqrt[mr]{a^{rn}}$, $q\sqrt[mp]{a^{pn}}$ und $-g\sqrt[mq]{a^{qn}}$, sind mit $n\sqrt[m]{a^n}$, $q\sqrt[m]{a^n}$ und $-g\sqrt[m]{a^n}$ einerlei, daher ist auch ihre Summe gleich $(n+q-g)\sqrt[m]{a^n}$. Sind daher ungleichnamige zu einander addirende Wurzelgrösen gegeben, die sich aber in gleichgültige gleichnamige mit einerlei Grösse unter dem Wurzelzeichen verwandeln lassen, so lassen sie sich nach der Vorschrift der Auflösung addiren, wenn man mit ihnen diese Verwandlung vornimmt.

3. *Zusatz.*

Lassen sich gegebene Wurzelgrösen nicht als gleichnamige mit einerlei Grösse unter dem Wurzelzeichen darstellen, so sind sie Dignitäten-Ausdrücke, deren Coefficient nicht zu einer und derselben Dignität gehören. Da sich nun dieser ihre Summe nicht durch einen einzigen Ausdruck darstellen läßt, so ist auch

auch klar, daſs die Summe solcher Wurzelgröſsen nur dadurch angezeigt werden kann, daſs man sie unverändert mit ihren Zeichen neben einander setzt.

Subtraction der Wurzelgröſsen.

§. 154.

Aufgabe.

Es soll die Differenz der $p\sqrt[n]{a^q}$ von $m\sqrt[n]{a^q}$ angegeben werden.

Auflösung.

Es ist $m\sqrt[n]{a^q} - p\sqrt[n]{a^q} = ma^{\frac{q}{n}} - pa^{\frac{q}{n}} = (m-p)a^{\frac{q}{n}}$.

Da nun $(m-p)a^{\frac{q}{n}} = (m-p)\sqrt[n]{a^q}$ ist, so ist auch

$$m\sqrt[n]{a^q} - p\sqrt[n]{a^q} = (m-p)\sqrt[n]{a^q}.$$

Hat also die zuverringernde Wurzelgröſse mit der subtrahirenden einerlei Wurzelexponenten und einerlei Gröſse unter dem Wurzelzeichen, so bekömmt man die Differenz, wenn man den gemeinschaftlichen Wurzelausdruck hinschreibt und diesem einen Coefficienten gibt, der die Differenz des Coefficienten der subtrahirenden Wurzelgröſse von dem Coefficienten der zuverringernden ist.

1. Zusatz.

Es ist $\sqrt[m]{a^m b^n} - \sqrt[m]{c^m b^n} = a\sqrt[m]{b^n} - c\sqrt[m]{b^n} = (a-c)\sqrt[m]{b^n}$.
Haben also zwei gleichnamige Wurzelgröſsen unter dem Wurzelzeichen verschiedene Gröſsen, sie lassen sich aber in andere ihnen gleichgültige verwandeln, die unter dem Wurzelzeichen einerlei Gröſse haben, so kann ihre Subtraction nach der vorhin vorgeschriebenen Regel geschehn, wenn mit ihnen diese Verwandlung vorgenommen ist.

2. *Zusatz.*

Es ist $g\sqrt[mq]{a^{qn}} - r\sqrt[mp]{a^{pn}} = g\sqrt[m]{a^n} - r\sqrt[m]{a^n} = (g-r)\sqrt[m]{a^n}$. Sind also die gegebenen Wurzelgrößen ungleichnamig, sie lassen sich aber in gleichnamige mit einerlei Größe unter dem Wurzelzeichen verwandeln, so werden sie nach der gegebenen Regel von einander subtrahirt, wenn sie in solche verwandelt sind.

3. *Zusatz.*

Können gegebene Wurzelgrößen nicht in gleichnamige mit einerlei Größe unter dem Wurzelzeichen verwandelt werden, so läßt sich ihre Differenz nicht als ein einziger Ausdruck darstellen; weil sie in diesem Falle Dignitäten sind, deren Coefficienten sich nicht auf eine und dieselbe Dignität beziehn. In diesem Falle bleibt nichts weiter übrig, als daß man das Zeichen des Coefficienten der subtrahirenden Wurzelgröße in das entgegengesetzte verwandelt, und nun die subtrahirende neben die zuverringernde setzt.

Multiplication der Wurzelgrößen.

§. 155.

Aufgabe.

Es wird das Product der $c\sqrt[m]{a}$ nach dem Gesetze der $d\sqrt[m]{b}$ verlangt.

Auflösung.

$$\text{Es ist } c\sqrt[m]{a} \cdot d\sqrt[m]{b} = ca^{\frac{1}{m}} \cdot db^{\frac{1}{m}} = cda^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}}$$

$$= cd\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = cd\sqrt[m]{ab}. \text{ (§. 151.)}$$

Es hat also das Product zweier gleichnamigen Wurzelgrößen mit ihnen einerlei Wurzelexponenten, aber sein Coefficient ist das Product ihrer Coefficienten, und seine Größe unter dem Wurzelzeichen, ist das Product ihrer Größen unter dem Wurzelzeichen.

Zusatz.

Es ist $r\sqrt[m]{a^n} \cdot p\sqrt[q]{b^t} = r\sqrt[mq]{a^{nq}} \cdot p\sqrt[mq]{b^{mt}} = rp\sqrt[mq]{a^{nq} \cdot b^{mt}}$. Sollen daher zwei ungleichnamige Wurzelgrößen unter sich multiplicirt werden, so verwandelt man sie in gleichnamige, und verfährt mit ihnen nach der gegebenen Regel.

Division der Wurzelgrößen.

§. 156.

Aufgabe.

Es wird der Quotient der $c\sqrt[m]{a^n}$ nach dem Gesetze der $d\sqrt[m]{b^p}$ gesucht.

Auflösung.

Es ist $c\sqrt[m]{a^n} : d\sqrt[m]{b^p} = ca^{\frac{n}{m}} : db^{\frac{p}{m}} = (c:d)(a^{\frac{n}{m}} : b^{\frac{p}{m}})$

$= (c:d)(a^n : b^p)^{\frac{1}{m}} = (c:d)\sqrt[m]{(a^n : b^p)}$.

Werden also zwei gleichnamige Wurzelgrößen gegeben, so hat ihr Quotient mit ihnen einerlei Wurzelexponenten. Sein Coefficient ist aber der Quotient des Coefficienten des Dividends nach dem Gesetze des Coefficienten des Divisors, und seine Größe unter dem Wurzelzeichen erhält man, wenn man des Dividends Größe unter dem Wurzelzeichen, nach dem Gesetze des Divisors Größe unter dem Wurzelzeichen, dividirt.

Zusatz.

Es ist $r\sqrt[m]{a^n} : p\sqrt[q]{b^t} = r\sqrt[mq]{a^{nq}} : p\sqrt[mq]{b^{mt}} = (r:p)\sqrt[mq]{(a^{nq} : b^{mt})}$. Soll daher der Quotient zweier ungleichnamigen Wurzelgrößen gefunden werden, so verwandelt man sie in gleichnamige, und dividirt sie als solche.

Dig-

Dignitätenerhebung der Wurzelgröſsen.

§. 157.

Lehrsatz.

Es iſt $(c\sqrt[m]{b^q})^{\frac{n}{p}} = c^{\frac{n}{p}}\sqrt[m]{b^{\frac{qn}{p}}}$.

Beweis.

Es iſt $c\sqrt[m]{b^q} = cb^{\frac{q}{m}}$, alſo $(c\sqrt[m]{b^q})^{\frac{n}{p}} = (cb^{\frac{q}{m}})^{\frac{n}{p}}$

$$= c^{\frac{n}{p}}.b^{\frac{q}{m}.\frac{n}{p}} = c^{\frac{n}{p}}.b^{\frac{1}{m}.\frac{qn}{p}} = c^{\frac{n}{p}}.b^{\frac{qn}{p}:m}$$

$$= c^{\frac{n}{p}}\sqrt[m]{b^{\frac{qn}{p}}}.$$

Man erhebt alſo eine Wurzelgröſse zu einer Dignität, wenn man ſowohl ihren Coefficienten als ihre Gröſse unter dem Wurzelzeichen dazu erhebt.

1. Zuſatz.

Es iſt $(c\sqrt[m]{b^q})^{\frac{n}{p}} = c^{\frac{n}{p}}\sqrt[m]{b^{\frac{qn}{p}}} = c^{\frac{n}{p}}\sqrt[mp]{b^{qn}} = \sqrt[p]{c^n}.\sqrt[mp]{b^{qn}}$

$$= \sqrt[mp]{c^{nm}}.\sqrt[mp]{b^{qn}} = \sqrt[mp]{c^{nm}.b^{qn}}.$$

2. Zuſatz.

Es iſt $(c\sqrt[m]{b^q})^m = c^m\sqrt[m]{b^{qm}} = c^m b^{\frac{qm}{m}} = c^m b^q$.

Wird alſo eine Wurzelgröſse zu einer Dignität erhoben, deren Exponent gleich dem Wurzelexponenten iſt, ſo erhält man ein Product, deſſen einer Factor die Gröſse unter dem Wurzelzeichen, und deſſen anderer Factor der Coefficient der Wurzelgröſse iſt, in der Dignität gedacht, wozu die Wurzelgröſse erhoben wird.

Ent-

Entwickelung der Wurzelgrössen, die unter Wurzelzeichen stehn.

§. 158.

Lehrsatz.

Es ist $\sqrt[\frac{m}{n}]{(c\sqrt[r]{b^q})} = c^{\frac{n}{m}}\sqrt[r]{b^{\frac{qn}{m}}}$.

Beweis.

Es ist $\sqrt[\frac{m}{n}]{(c\sqrt[r]{b^q})} = (c\sqrt[r]{b^q})^{\frac{1}{\frac{m}{n}}} = (c\sqrt[r]{b^q})^{\frac{n}{m}}$

$= c^{\frac{n}{m}}\sqrt[r]{b^{\frac{qn}{m}}}$.

1. Zusatz.

Es ist $c^{\frac{n}{m}}\sqrt[r]{b^{\frac{qn}{m}}} = \sqrt[m]{c^n}\cdot\sqrt[r]{b^{\frac{qn}{m}}} = \sqrt[m]{c^n}\cdot\sqrt[mr]{b^{qn}}$

$= \sqrt[mr]{c^{nr}}\cdot\sqrt[mr]{b^{qn}} = \sqrt[mr]{c^{nr}\cdot b^{qn}}$.

2. Zusatz.

Es ist $\sqrt[p]{(\sqrt[q]{(c\sqrt[r]{a^t})})} = \sqrt[p]{(\sqrt[q]{(\sqrt[r]{c^r\cdot a^t})})} = \sqrt[p]{(\sqrt[r]{c^{\frac{r}{q}}\cdot a^{\frac{t}{q}}})}$

$= \sqrt[r]{(c^{\frac{r}{pq}}\cdot a^{\frac{t}{pq}})} = \sqrt[pqr]{c^r\cdot a^t}$.

Wenn also eine Wurzelgröſse unter mehrern Wurzelzeichen steht, so erhält man einen gleichgültigen Ausdruck, der nur ein Wurzelzeichen hat, wenn man den Coefficienten der Wurzelgröſse unter das Wurzelzeichen bringt, vor welchem er steht, und den Wurzelexponenten, der hierzu gehört, nach dem Gesetze aller übrigen Wurzelexponenten multiplicirt. Sollte die erhaltene Wurzelgröſse gebrochne Exponenten haben, so können diese, nach §. 148. 4. Zusatz, in ganze verwandelt werden, ohne daſs dadurch der Werth der Wurzelgröſse verändert wird.

3. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } \sqrt[\frac{m}{n}]{(c\sqrt[r]{b^{\frac{m}{n}}})} = \sqrt[\frac{m}{n}]{(\sqrt[r]{c^r b^{\frac{m}{n}}})} = \sqrt[\frac{rm}{n}]{c^r b^{\frac{m}{n}}}$$

$$= \sqrt[\frac{rm}{n}]{c^r} \cdot \sqrt[\frac{rm}{n}]{b^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{c} \cdot \sqrt[r]{b}.$$

Multiplication solcher Formeln, unter deren Gliedern sich Wurzelgrösen befinden.

§. 159.

Da die Wurzelgrösen nichts anders als Dignitäten mit gebrochnen Exponenten sind, so ist einleuchtend, dass man bei der Multiplication solcher Formeln, die Wurzelgrösen enthalten, verfahren muss, wie man bei der Multiplication der Formeln verfährt, in welchen Dignitäten vorkommen (§. 135.). Man multiplicirt also auch hier die einzelnen Glieder des Multiplicands nach den Gesetzen der einzelnen Glieder des Multiplicators, und addirt hierauf die dadurch entstandenen Producte.

1. *Beispiel.*

Es soll $2\sqrt{a}-3$ nach dem Gesetze der $\sqrt{a}+2$ multiplicirt werden.

$$\begin{array}{rrr} & 2\sqrt{a} & -\ 3 \\ & \sqrt{a} & +\ 2 \\ \hline & 4\sqrt{a} & -\ 6 \\ 2a & -\ 3\sqrt{a} & \\ \hline 2a & +\ \sqrt{a} & -\ 6 \end{array}$$

2. *Beispiel.*

Es wird das Product der $4\sqrt{a}-6\sqrt[4]{a}+9$ nach dem Gesetze der $2\sqrt[4]{a}+3$ verlangt.

$$\begin{array}{r}
4\sqrt{a} - 6\sqrt[4]{a} + 9 \\
2\sqrt[4]{a} + 3 \\
\hline
+ 12\sqrt{a} - 18\sqrt[4]{a} + 27 \\
8\sqrt[4]{a^3} - 12\sqrt{a} + 18\sqrt[4]{a} \qquad \\
\hline
8\sqrt[4]{a^3} \quad * \qquad * \quad + 27
\end{array}$$

3. *Beispiel.*

Es soll $2\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 4b$ nach dem Gesetze der $3\sqrt{a} - 2a\sqrt{b} + b$ multiplicirt werden.

$$\begin{array}{r}
2\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 4b \\
3\sqrt{a} - 2a\sqrt{b} + b \\
\hline
+ 2b\sqrt{a} - 3ab\sqrt{b} - 4b^2 \\
- 4a\sqrt{ab} + 6a^2b + 8ab\sqrt{b} \qquad \\
6a - 9a\sqrt{ab} - 12b\sqrt{a} \qquad\qquad\qquad \\
\hline
6a - 13a\sqrt{ab} - 10b\sqrt{a} + 6a^2b + 5ab\sqrt{b} - 4b^2
\end{array}$$

4. *Beispiel.*

Man sucht das Product der $B\sqrt{B} - S\sqrt{S}$ nach dem Gesetze der $\sqrt{B} + \sqrt{S}$.

$$\begin{array}{r}
B\sqrt{B} - S\sqrt{S} \\
\sqrt{B} + \sqrt{S} \\
\hline
+ B\sqrt{BS} - S^2 \\
B^2 - S\sqrt{BS} \qquad \\
\hline
B^2 + B\sqrt{BS} - S\sqrt{BS} - S^2.
\end{array}$$

Division solcher Formeln, unter deren Gliedern sich Wurzelgrössen befinden.

§. 160.

Da man bei der Multiplication dieser Formeln die Glieder des Multiplicands in der Ordnung nach den Gesetzen der einzelnen Glieder des Multiplicators multiplicirt und die da-

durch

durch erhaltenen Producte addirt, wie es die Multiplication der Dignitätenformeln vorschreibt, so ist einleuchtend, daſs auch ihre Division nach dem Gesetze geschehn müſſe, nach welchem die Division der Dignitätenformeln vorgenommen werden muſs.

1. *Beiſpiel.*

Es wird der Quotient der $2a - \sqrt{a} - 6$ nach dem Gesetze der $\sqrt{a} + 2$ verlangt.

$2a + \sqrt{a} - 6 \mid 2\sqrt{a} - 3$

$\sqrt{a} + 2$

$2\sqrt{a}$

$2a + 4\sqrt{a}$

$-3\sqrt{a} - 6$

$\sqrt{a} + 2$

-3

$-3\sqrt{a} - 6$

2. *Beiſpiel.*

Man ſucht den Quotienten der $8\sqrt[4]{a^3} + 27$ nach dem Geſetze der $2\sqrt[4]{a} + 3$.

$8\sqrt[4]{a^3} + 27 \mid 4\sqrt{a} - 6\sqrt[4]{a} + 9$

$2\sqrt[4]{a} + 3$

$4\sqrt{a}$

$8\sqrt[4]{a^3} + 12\sqrt{a}$

$-12\sqrt{a} + 27$

$2\sqrt[4]{a} + 3$

$-6\sqrt[4]{a}$

$-12\sqrt{a} - 18\sqrt[4]{a}$

$+18\sqrt[4]{a} + 27$

$2\sqrt[4]{a} + 3$

$+9$

$+18\sqrt[4]{a} + 27$

3. Bei-

3. *Beispiel.*

Es soll $B^2 + B\sqrt{BS} - S\sqrt{BS} - S^2$ nach dem Gesetze der $\sqrt{B} + \sqrt{S}$ dividirt werden.

$$\begin{array}{l|l} B^2 + B\sqrt{BS} - S\sqrt{BS} - S^2 & B\sqrt{B} - S\sqrt{S} \\ \sqrt{B} + \sqrt{S} & \\ \quad + B\sqrt{B} & \\ \hline B^2 + B\sqrt{BS} & \\ \quad\quad - S\sqrt{BS} - S^2 & \\ \quad\quad\quad \sqrt{B} + \sqrt{S} & \\ \quad\quad\quad\quad - S\sqrt{S} & \\ \hline \quad\quad - S\sqrt{BS} - S^2. & \end{array}$$

Von den eingebildeten Wurzelgrössen.

§. 161.

Nach der Erklärung, die von den eingebildeten Wurzelgrössen gegeben ist, haben sie keinen reellen Werth (§. 147. 2. Erkl. Zus.), es scheint daher, als könnte mit ihnen keine Rechnung vorgenommen werden. Allein dieses ist nicht der Fall, man kann sie wie reelle Wurzelgrössen behandeln, so lange man nicht nach ihrem Werth fragt. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, dass ihre Natur näher untersucht und dass die Möglichkeit, mit ihnen zu rechnen, deutlich vor Augen gestellt wird.

§. 162.

Ein allgemeiner Ausdruck für eine unmögliche Wurzelgrösse ist $\sqrt[2n]{-e}$, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, und er entsteht aus $\sqrt[2n]{+e}$, wenn man sich $+e$ unter der entgegengesetzten Bedingung denkt. Der ganze Denkact, welcher daher bei $\sqrt[2n]{+e}$ vorgeht, geht auch bei $\sqrt[2n]{-e}$ vor, nur der kömmt noch hinzu, dass man sich die Grösse unter dem Wurzelzeichen nicht unter der Bedingung denkt, worunter man sie schlechthin setzt, sondern unter der, die dieser Bedingung

 ent-

Multiplication von M zu P geht, ſo geht man bei der Diviſion von P zu M; kömmt man alſo bei eingebildeten Wurzelgröſsen, ſo von M zu P, wie man bei reellen von M zu P geht, ſo iſt klar, daſs man auch bei eingebildeten Wurzelgröſsen ſo von P zu M geht, wie man bei reellen von P zu M kömmt.

Von der Erhebung zu Dignitäten.

§. 167.

Es iſt $(\sqrt[m]{b})^n = \sqrt[m]{b^n}$, d. h. wenn man ſich die n^{te} Dignität der Wurzel des m^{ten} Grades, von b denkt, ſo denkt man ſich die Wurzel des m^{ten} Grades der n^{ten} Potenz von b. Wird alſo der Ausdruck $(\sqrt[2n]{-b})^m$ gegeben, ſo heiſst dieſes, es ſoll — b, in der m^{ten} Dignität gedacht, als die $2n^{te}$ Potenz angeſehn werden, oder es iſt $(\sqrt[2n]{-b})^m$ gleich $\sqrt[2n]{((-b)^m)}$. Iſt hier m eine grade Zahl, ſo wird $\sqrt[2n]{((-b)^m)}$ eine mögliche Wurzelgröſse, iſt aber m eine ungrade Zahl, ſo bleibt $\sqrt[2n]{((-b))^m}$ eine eingebildete.

1. *Zuſatz.*

Es iſt $(\sqrt[2n]{-b})^{2n} = -b$. Denn nach dem vorhergehenden ſagt $(\sqrt[2n]{-b})^{2n}$, man denke ſich — b in der $2n^{ten}$ Potenz, und denke ſich dann wieder die Wurzel dieſer Dignität, d. h. man denke ſich — b.

2. *Zuſatz.*

Es geſchieht die Dignitätenerhebung einer eingebildeten Wurzelgröſse nach den Regeln, welche bei der Dignitätenerhebung reeller Wurzelgröſsen vorgeſchrieben ſind.

Von

Von den eingebildeten Wurzelgrössen, die unter Wurzelzeichen vorkommen.

§. 168.

In dem Ausdrucke $\sqrt[m]{(\sqrt[2n]{-b})}$ sagt 2n, man soll sich — b als die 2nte, und m sagt, man soll sich diese 2nte Dignität wieder in der mten Potenz denken, folglich zeigt der ganze Ausdruck an, dass man sich — b als die 2nmte Dignität denken soll, also ist $\sqrt[m]{(\sqrt[2n]{-b})} = \sqrt[2mn]{-b}$.

1. *Zusatz.*

Es ist $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{(\sqrt[2n]{-b})})} = \sqrt[p]{(\sqrt[2mn]{-b})} = \sqrt[2mnp]{-b}$.

2. *Zusatz.*

Es findet also bei den eingebildeten Wurzelgrössen, die sich unter Wurzelzeichen befinden, das nämliche Gesetz statt, was bei der reellen Wurzelgrösse statt findet.

---

2. Von der Ausziehung der Wurzeln.

§. 139.

Die Ausziehung der Wurzel ist die Handlung, vermittelst welcher zu einer gegebenen Dignität die Wurzel gefunden wird. Wird aber eine Dignität gegeben, wozu die Wurzel gefunden werden soll, so ist einleuchtend, dass man darauf zu sehn hat, wo und in welcher Form sich die einzelnen Theile der Wurzel in der Dignität befinden, denn weiss man dieses, so braucht man sie nur da, wo man sie findet, herauszuheben und ihnen ihre vorige Form wiederzugeben. Da nun die Formeln, welche uns mit den Gesetzen der verschiedenen Dignitäten bekannt machen, von einander verschieden sind, so sieht man leicht ein, dass sich die Handlung, worin die Ausziehung der Wurzel besteht, nach dem Grade der gegebenen Dignität richten wird. Am öftersten wird die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel verlangt, daher ich hiervon ausführlich handeln will.

Erklärung.

Kann man die Wurzel einer Dignität genau angeben, so heisst die gegebene Dignität eine vollständige, ist dieses aber nicht der Fall, so wird sie eine unvollständige genannt.

1. Zusatz.

Eine ganze Zahl ist dann nur ein vollständiges Quadrat, wenn sich ihre Wurzel als ganze Zahl darstellen läst. Denn eine eigentliche gebrochne Zahl gibt, zum Quadrat erhoben, wieder eine eigentliche gebrochne, und eine vermischte Zahl kann ebenfalls, zum Quadrat erhoben, keine ganze Zahl geben. Denn es sey die Wurzel gleich $G + \frac{Z}{n}$, wo G eine ganze und $\frac{Z}{n}$ eine eigentliche gebrochne Zahl von der einfachsten Form bedeutet, so ist $\left(G + \frac{Z}{n}\right)^2$ gleich $G^2 + \frac{2GZ}{n} + \frac{Z^2}{n^2}$, folglich ist $\left(G + \frac{Z}{n}\right)^2$ nur dann eine ganze Zahl, wenn $\frac{2GZ}{n} + \frac{Z^2}{n^2}$ eine ganze Zahl ist. Es sey daher $\frac{2GZ}{n} + \frac{Z^2}{n^2} = P$, so ist $2GZ + \frac{Z^2}{n} = nP$; aber Z und n haben nach der Voraussetzung keinen Factor mit einander gemein, folglich auch Z^2 und n nicht, daher ist $\frac{Z^2}{n}$ entweder eine eigentliche gebrochne Zahl oder eine vermischte, und in beiden Fällen ist auch $2GZ + \frac{Z^2}{n}$ eine vermischte Zahl, folglich nicht gleich nP und daher auch nicht $P = \frac{2GZ}{n} + \frac{Z^2}{n^2}$.

2. Zusatz.

Eben dieses läst sich auf eine ähnliche Weise vom Würfel zeigen.

---

1. Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 170.

Aufgabe.

Es wird die Quadratwurzel von $a^2 + 2ab + b^2$ verlangt.

Auflösung.

Nach §. 139. ist die Wurzel gleich $a + b$, die man daher aus $a^2 + 2ab + b^2$ auf folgende Art findet:

Man sucht die Wurzel des ersten Theils des gegebenen Quadrats, so bekömmt man den ersten Theil der gesuchten Wurzel, nämlich a. Diesen erhebt man zum Quadrate und subtrahirt dieses von $a^2 + 2ab + b^2$, so bleibt $2ab + b^2$ übrig. Wird also a nach dem Gesetze der 2 multiplicirt und des erhaltenen Rests $2ab + b^2$ erstes Glied nach dem Gesetze dieses Products dividirt, so erhält man den zweiten Theil der gesuchten Wurzel, nämlich $+ b$.

Aus der folgenden Figur wird man leicht einsehn, wie man dieses vorgeschriebene Verfahren am bequemsten ausführt.

			1. Theil, 2. Theil der Wurzel.
a^2	$+ 2ab$	$+ b^2$	$a + b$
a^2			
o	$+ 2ab$	$+ b^2$	
	$2a$	$+ b$	
		$+ b$	
	$2ab$	$+ b^2$	

Zusatz.

Da nun das Quadrat einer jeden zweitheiligen Wurzel die Form $a^2 + 2ab + b^2$ hat, so ist einleuchtend, dass man auf dem vorgeschriebenen Wege jede binomische Wurzel aus ihrem Quadrate finden kann, wenn beide oder einer ihrer Theile unbestimmt gelassen, d. h. durch Buchstaben angegeben sind.

1. *Beispiel.*

Es sey das gegebene Quadrat gleich $a^2 + 2a + 1$

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^2 & +\ 2a\ +\ 1 & a + 1 \\
a^2 & & \\
\hline
0 & \quad 2a + 1 & \\
 & \quad 2a + 1 & \\
 & \qquad\ + 1 & \\
\hline
 & \quad 2a + 1 &
\end{array}
$$

2. *Beispiel.*

Das gegebene Quadrat sey gleich $a^2 - a + \frac{1}{4}$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^2 & -\ a\ +\ \frac{1}{4} & a - \frac{1}{2} \\
a^2 & & \\
\hline
0 & -\ a + \frac{1}{4} & \\
 & \quad 2a - \frac{1}{2} & \\
 & \qquad\ - \frac{1}{2} & \\
\hline
 & -\ a + \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

3. *Beispiel.*

Es sey das gegebene Quadrat gleich $c^2 + 3cm + \frac{9m^2}{4}$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
c^2 & +\ 3cm\ +\ \frac{9m^2}{4} & c + \frac{3m}{2} \\
c^2 & & \\
\hline
0 & +\ 3cm + \frac{9m^2}{4} & \\
 & \quad 2c + \frac{3m}{2} & \\
 & \qquad\quad \frac{3m}{2} & \\
\hline
 & \quad 3cm + \frac{9m^2}{4} &
\end{array}
$$

2. *Beispiel.*

Das gegebene Quadrat sey gleich $a^2 + \frac{3am}{2} + \frac{9m^2}{16}$.

$$\begin{array}{l|l|l} a^2 & + \frac{3am}{2} + \frac{9m^2}{16} & a + \frac{3m}{4} \\ a^2 & & \end{array}$$

$$0 \quad + \frac{3am}{2} + \frac{9m^2}{16}$$

$$2a + \frac{3m}{4}$$

$$+ \frac{3m}{4}$$

$$\frac{3am}{2} + \frac{9m^2}{16}$$

§. 171.

Aufgabe.

Es wird die Quadratwuzel des Quadrats

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$$

gesucht.

Auflösung.

Nach §. 139. 3. Zus. ist die Wurzel dieses Quadrats gleich $a+b+c+d+e$. Wie man diese findet, sieht man aus folgender Figur:

Quadrat | Wurzel.

$a^2 | + 2ab + b^2 | + 2(a+b)c + c^2 | + 2(a+b+c)d + d^2 | + 2(a+b+c+d)e + e^2 \big] a + b + c + d + e$

a^2

$2ab + b^2$
$2a + b$
$+ b$
$2ab + b^2$
$0 \quad 0$

$2(a+b)c + c^2$
$2(a+b) + c$
$+ c$
$2(a+b)c + c^2$
$0 \quad 0$

$2(a+b+c)d + d^2$
$2(a+b+c) + d$
$+ d$
$2(a+b+c)d + d^2$
$0 \quad 0$

$2(a+b+c+d)e + e^2$
$2(a+b+c+d) + e$
$+ e$
$2(a+b+c+d)e + e^2$
$0 \quad 0$

Zu-

Zuſatz.

Da nun das Geſetz, welches in dem gegebenen Quadrate liegt, nach §. 139. 4. Zuſ., für das Quadrat einer jeden vieltheiligen Wurzel gilt, ſo zeigt die gegebene Auflöſung, wie man bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer allgemeinen Formel, überhaupt zu verfahren hat.

§. 172.

Bisher iſt nur von vollſtändigen Dignitäten geſprochen, daher nach dem letzten Abzuge kein Reſt übrig blieb. Iſt aber die gegebene Dignität ein unvollſtändiges Quadrat, ſo bleibt am Ende ein Reſt, woraus man beurtheilen kann, was noch zu dem gegebenen Quadrate addirt werden muſs, damit es ein vollſtändiges wird.

1. Beiſpiel.

$$\begin{array}{r|l|l}
a^2 & -\ ac + \frac{3c^2}{4} & a - \frac{1}{2}c \\
a^2 & & \\
\hline
 & -\ ac + \frac{3c^2}{4} & \\
 & 2a - \frac{1}{2}c & \\
 & -\ \frac{1}{2}c & \\
\hline
 & -\ ac + \frac{1}{4}c^2 & \\
\hline
 & \text{Reſt} = \frac{2}{4}c^2 = \frac{1}{2}c^2 &
\end{array}$$

Alſo $a^2 - ac + \frac{3c^2}{4}$ iſt kein vollſtändiges Quadrat, weil der Reſt $\frac{1}{2}c^2$ bleibt. Soll es alſo ein vollſtändiges Quadrat werden, ſo muſs zu $a^2 - ac + \frac{3c^2}{4}$ die Zahl $-\ \frac{1}{2}c^2$ addirt werden.

2. *Bei-*

§. 175.

Lehrsatz.

Ist die geringste Ziffer f einer Zahl M von der n^{ten} Ordnung, so ist die geringste Ziffer von f^2 in M^2 von der Stelle der Einer, um 2n Stellen entfernt.

Beweis.

Hier ist der eigentliche Werth von f gleich $f.10^n$, folglich $f^2 = f^2.10^{2n}$, also die geringste Ziffer des Quadrats von f ist von der $2n^{ten}$ Ordnung. Soll sie aber von der $2n^{ten}$ Ordnung seyn, so muss sie auch um 2n Stellen von der Stelle der Einer entfernt seyn.

1. Zusatz.

Schneidet man also in M^2 von der Rechten nach der Linken immer Paare von Stellen ab, so kömmt man gewiss zu der geringsten Ziffer von f^2.

2. Zusatz.

Eine Zahl, die keine Einer, aber Zehner hat, gibt ein Quadrat, was sich mit 2 Nullen endigt. Sind auch keine Zehner da, so endigt sich das Quadrat mit vier Nullen u. s. w.

3. Zusatz.

Eine Zahl, die sich mit einer ungraden Anzahl von Nullen endigt, ist ein unvollständiges Quadrat.

§. 176.

Lehrsatz.

Wenn e die höchste Ziffer einer Zahl M ist und die n^{te} Ordnung hat, so kann die höchste Ziffer von M^2 von der $2n+1^{ten}$ Ordnung seyn.

Beweis.

Wenn die höchste Ziffer e der Zahl M von der n^{ten} Ordnung ist, so lässt sie sich durch $e.10^n$, folglich ihr Quadrat durch $e^2.10^{2n}$ bezeichnen. Also die geringste Ziffer von e^2 ist von der $2n^{ten}$ Ordnung. Nun kann e^2 zwei Stellen einnehmen, welches der Fall ist, wenn sie grösser als 3 ist, folglich kann auch die höchste Ziffer von e^2, von der $2n+1^{ten}$ Ordnung seyn.

§. 177.

Lehrsatz.

Wenn eine Zahl, deren höchste Ziffer von der n^{ten} Ordnung ist, zum Quadrate erhoben wird, so kann die höchste Ziffer dieses Quadrats höchstens von der $2n+1^{ten}$ Ordnung seyn.

Beweis.

Daſs ihre höchste Ziffer von der $2n+1^{ten}$ Ordnung seyn kann, beweiset §. 176.; und daſs sie diese Ordnung nicht überschreiten könne, wird folgendermaſsen bewiesen: Es sey eine Zahl $= M = a \cdot 10^n + b$, so daſs man sich unter b eine Menge von Ziffern denken muſs, so ist $1 \cdot 10^{n+1}$ gröſser als M, also auch $1 \cdot 10^{2n+2}$ gröſser als M^2. Folglich wenn M^2 eine Ziffer von der Ordnung $2n+2$ hätte, so wäre diese Ziffer gröſser als M^2, welches absurd ist.

Zusatz.

Da eine jede Zahl eine Zifferstelle mehr hat, als die Zahl der Ordnung ihrer höchsten Ziffer Einheiten in sich begreift, so ist einleuchtend, daſs das Quadrat einer Zahl, deren höchste Ziffer von der n^{ten} Ordnung ist, höchstens $2n+2$ Ziffern haben könne.

§. 178.

Lehrsatz.

Eine Zahl M^2, die $2n+1$ oder $2n+2$ Zifferstellen hat, hat eine Quadratwurzel M von $n+1$ Zifferstellen.

Beweis.

Gesetzt, die Wurzel M hätte nur n Zifferstellen, so wäre ihre höchste Ziffer f von der $n-1^{ten}$ Ordnung, also gleich $f \cdot 10^{n-1}$. Daher könnte M^2 nach §. 177. höchstens eine Ziffer von der $2n-1^{ten}$ Ordnung, folglich auch nur 2n Zifferstellen haben, welches wider die Voraussetzung wäre.

Hätte aber M, $n+2$ Zifferstellen, so wäre ihre höchste Ziffer f von der $n+1^{ten}$ Ordnung, also gleich $f \cdot 10^{n+1}$, deren Quadrat folglich $f^2 \cdot 10^{2n+2}$ ist, daher die höchste Ziffer in M^2 wenigstens von der $2n+2^{ten}$ Ordnung seyn und daher M^2 auch wenigstens $2n+3$ Zifferstellen haben müſste, welches ebenfalls wider die Voraussetzung wäre.

Zu-

Zusatz.

Man kann also aus der Anzahl der Zifferstellen einer Zahl sogleich beurtheilen, wie viele Ziffern ihre Quadratwurzel hat, und zwar, besitzt die gegebene Zahl eine grade Anzahl von Zifferstellen, so hat ihre Quadratwurzel nur halb so viele; hat sie aber eine ungrade Anzahl von Stellen, so braucht man nur noch eine hinzuzudenken, die halbe Anzahl dieser Stellen bestimmt alsdenn, wie viele die Wurzel hat.

§. 179.

Wenn die nächst auf einander folgenden Ziffern einer Zahl M folgende sind:

$a.10^n$, $b.10^{n-1}$, $c.10^{n-2}$, $d.10^{n-3}$, $e.10^{n-4}$, $f.10^{n-5}$ u. s. w.

so sind die Quadrate dieser Ziffern

$a^2.10^{2n}$, $b^2.10^{2n-2}$, $c^2.10^{2n-4}$, $d^2.10^{2n-6}$, $e^2.10^{2n-8}$, $f^2.10^{2n-10}$ u. s. w.

folglich

die geringste Ziffer des Quadrats der höchsten Ziffer ist von der $2n^{ten}$ Ordnung,

die geringste Ziffer des Quadrats der nächstfolgenden ist von der $2n-2^{ten}$ Ordnung,

die geringste Ziffer des Quadrats der hierauf folgenden ist von der $2n-4^{ten}$ Ordnung

u. s. w.

Hieraus folgt, daß wenn M zum Quadrate erhoben wird, und man in M^2 die geringste Ziffer des Quadrats der geringsten Ziffer von M anzugeben weiß, daß man alsdenn auch bestimmen kann, wo sich in M^2 die Quadrate der übrigen Ziffern von M anfangen, weil sich das Quadrat der Ziffer p um zwei Stellen weiter zur Linken anfängt, als das Quadrat von q, wenn q eine um 1 geringere Ordnung als p hat.

§. 180.

Die zwiefachen Producte der einzelnen Ziffern der Zahl M, sind:

$2(a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^{n-1}) = 2ab \cdot 10^{2n-1}$.
$2(a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1})c \cdot 10^{n-2} = 2ac \cdot 10^{2n-2} + 2bc \cdot 10^{2n-3}$.
$2(a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2})d \cdot 10^{n-3}$
$= 2ad \cdot 10^{2n-3} + 2bd \cdot 10^{2n-4} + 2cd \cdot 10^{2n-5}$.
u. s. w.

folglich
die geringste Ziffer des ersten zwiefachen Producᵗs ist von der $2n-1^{ten}$ Ordnung,
die geringste Ziffer des zweiten zwiefachen Producᵗs ist von der $2n-3^{ten}$ Ordnung,
die geringste Ziffer des dritten zwiefachen Producᵗs ist von der $2n-5^{ten}$ Ordnung
u. s. w.

Weiss man also in M^2 die Anfangsstelle des Quadrats der höchsten Ziffer von M, so kennt man auch die Anfangsstelle des höchsten zwiefachen Producᵗs, weil diese um eine Stelle weiter zur Rechten steht als jene, und kennt man die Anfangsstelle des höchsten zwiefachen Producᵗs, so kennt man auch die Anfangsstelle aller übrigen, weil allemal die Anfangsstelle eines nächstfolgenden um zwei Stellen weiter zur Rechten steht, als die Anfangsstelle des nächst vorhergehenden.

§. 181.

Es sey $M^2 = pqrsmnovtu$, so dass p, q, r u. s. w. die Ziffern der Zahl M^2 bedeuten, die sich nicht mit o endigen soll. Schneidet man nun hierin von der Rechten nach der Linken immer zwei und zwei Stellen ab, so erhält man $M^2 =$ pq | rs | mn | ov | tu. Nennt man hier jede zwei abgeschnittenen Ziffernstellen, eine Klasse, so enthält eine jede Klasse die Anfangsstelle eines zwiefachen Producᵗs und eines Quadrats. Denn M besitzt so viele Ziffernstellen, als M^2 Klassen hat (§. 178. Zusatz), ferner fängt sich das Quadrat der geringsten Ziffer in u, folglich das Quadrat der nächsthöhern Ziffer in v u. s. w. an, so dass sich das Quadrat der höchsten Ziffer in Q anfangen muss. Das höchste zwiefache Producᵗ fängt sich in r an (§. 180.), also das nächst geringere in m, das hierauf folgende in o und das letzte in t. Theilt man also eine gegebene Zahl, die sich nicht mit o

 endigt,

endigt, von der Rechten nach der Linken in Klassen ab, deren jede zwei Ziffern besitzt, so kann man in ihr die Anfangsstellen der einzelnen Quadrate und der zwiefachen Producte bestimmen. Sollte die gegebene Zahl ein vollständiges Quadrat seyn, so würde dieses nach §. 175. 1. Zus. ebenfalls der Fall seyn, wenn sie sich auch mit 0 endigte. Da nun ein unvollständiges Quadrat bei der Ausziehung der Quadratwurzel, als ein vollständiges angesehn werden muss, so ist einleuchtend, dass wenn in einer Zahl, deren Quadratwurzel gesucht werden soll, von der Rechten nach der Linken immer zwei und zwei Stellen abgeschnitten werden, dass dadurch auf die vorhin angegebene Weise die Anfangsstellen der Quadrate und die zwiefachen Producte der einzelnen Ziffern der Quadratwurzel bestimmt werden.

§. 182.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Quadratwurzel zu ziehn.

Auflösung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Klassen, deren eine jede zwei Ziffern besitzt.

2) Man suche eine Zahl a, deren Quadrat entweder gleich der Zahl der ersten Klasse, oder die doch als Quadrat, die ihr zunächst kleinere ist. Diese Zahl ist die höchste Ziffer der verlangten Quadratwurzel.

3) Diese gefundene Ziffer erhebe man zum Quadrate und subtrahire dieses von der Zahl der ersten Klasse. Zu dem Reste ziehe man die zweite Klasse herunter und setze das Doppelte der gefundenen höchsten Ziffer der Wurzel, nämlich 2a, so hierunter, dass die Einer dieser 2a unter der höchsten Stelle der zweiten Klasse stehn. Nun dividire man den Theil der über 2a stehenden Zahl, dessen geringste Stelle die höchste der zweiten Klasse ist, nach dem Gesetze der 2a und nehme den Quotienten b zur zweiten Ziffer der verlangten Quadratwurzel an. Hierauf multiplicire man 2a nach dem Gesetze der b und setze das Product 2ab, so unter 2a, dass die geringste Stelle von 2ab

unter

unter der von $2a$ ſteht. Iſt dieſes geſchehn, ſo erhebe man b zum Quadrate, und ſetze dieſes ſo unter $2ab$, daſs die geringſte Stelle von b^2 unter der geringſten der zweiten Klaſſe ſteht. In der Stellung, welche nun $2ab$ und b^2 unter ſich haben, werden $2ab$ und b^2 zu einander addirt und von der Zahl ſubtrahirt, welche über dem Diviſor $2a$ ſteht. Iſt nun die Summe von $2ab + b^2$ gröſser, als die Zahl, wovon ſie ſubtrahirt werden ſoll, ſo iſt b zu groſs angenommen. Bleibt etwas übrig, was gröſser als $2ab + b^2$ iſt, ſo iſt b zu klein angenommen; bleibt aber nichts übrig, oder iſt wenigſtens die Differenz kleiner als $2ab + b^2$, ſo iſt b die zweite Ziffer der verlangten Quadratwurzel.

4) Zu der Differenz, welche nach der Subtraction des $2ab + b^2$ übrig geblieben iſt, ſetze man die dritte Klaſſe, nehme das Doppelte von $a + b$, und ſetze $2(a + b)$ ſo unter jene Differenz und den Ziffern, welche hierzu geſetzt ſind, daſs die geringſte Stelle von $2(a + b)$ unter die höchſte der dritten Klaſſe kömmt. Nun dividire man den Theil der über $2(a + b)$ ſtehenden Zahl, deſſen geringſte Stelle die höchſte der dritten Klaſſe iſt, nach dem Geſetze der $2(a + b)$, und nehme den Quotienten c zur dritten Ziffer der verlangten Quadratwurzel an. Alsdenn multiplicire man c nach dem Geſetze des Diviſors $2(a + b)$, und ſetze das Product ſo unter $2(a + b)$, daſs die geringſte Stelle von $2(a + b)c$ unter die geringſte von $2(a + b)$ kömmt. Iſt dieſes geſchehn, ſo erhebe man c zum Quadrate, und ſetze c^2 ſo unter $2(a + b)c$, daſs ſich die geringſte Stelle von c^2 unter der geringſten Stelle der dritten Klaſſe befindet. In dieſer Stellung, welche nun $2(a + b)c$ und c^2 unter ſich haben, werden ſie addirt und ihre Summe wird von der Zahl ſubtrahirt, die über dem Diviſor $2(a + b)$ ſteht. Iſt nun $2(a + b)c + c^2$ gröſser als die Zahl, wovon ſie ſubtrahirt werden ſoll, ſo iſt c zu groſs angenommen; iſt aber der Reſt gleich 0, oder doch kleiner als $2(a + b)c + c^2$, ſo iſt c die dritte Ziffer der geſuchten Quadratwurzel.

5) Zu diesem zweiten Reste werden wieder die Ziffern der vierten Klasse herunter gezogen und unter die dadurch entstandene Zahl wird das Product $2(a+b+c)$ so gesetzt, dass die geringste Stelle von $2(a+b+c)$ unter der höchsten der vierten Klasse steht. Dividirt man nun den Theil der über $2(a+b+c)$ befindlichen Zahl, der sich zur Rechten mit der höchsten Stelle der vierten Klasse anfängt, nach dem Gesetze der $2(a+b+c)$, so bekömmt man die vierte Ziffer d u. s. w.

6) Bleibt am Ende kein Rest; so ist die gegebene Zahl ein vollständiges Quadrat, und die Wurzel ist ganz genau gefunden.

Beweis.

Die Richtigkeit des vorgeschriebenen Verfahrens erhellet aus §. 171. und §. 181.

Beispiel.

	Gegebene Zahl.	Wurzel.
		$a+b+c+d+e$
	28|58|18|54|44	5 3 4 6 2
$a^2 =$	25	
1ter Rest $=$	3	
	358	
1ter Divisor $= 2a =$	10	
$2ab =$	30	
$b^2 =$	9	
	309	
2ter Rest $=$	49	
	4918	
2ter Div. $= 2(a+b) = 2 . 53 =$	106	
$2(a+b)c =$	424	
$c^2 =$	16	
	4256	
3ter Rest $=$	662	
	66254	
3ter Div. $= 2(a+b+c) = 2 . 534 =$	1068	
$2(a+b+c)d =$	6408	
$d^2 =$	36	
	64116	
4ter Rest $=$	2138	
	213844	
4ter Div. $= 2(a+b+c+d) = 2 . 5346 =$	10692	
$2(a+b+c+d)e =$	21384	
$e^2 =$	4	
	213844	
5ter Rest $=$	000000	

Anmerkung.

Es ist nicht nothwendig, wie in dem gegebenen Beispiele geschehn ist, den Rest zuerst allein, dann wieder unter sich nebst den beiden Stellen der folgenden Klasse zu setzen, son-

dern man kann sogleich zu dem Reste die beiden Stellen der folgenden Klasse fügen. Man hat auch nicht nöthig, den Divisor jedesmal allein nach dem Gesetze des Quotienten zu multipliciren und dann das Quadrat des Quotienten darunter zu setzen, und hierauf die Summe dieser beiden Zahlen zu suchen, sondern man kann den Quotienten neben den Divisor schreiben und die hierdurch entstandene Zahl nach dem Gesetze des Quotienten multipliciren, so erhält man das nämliche. So ist z. B. der dritte Divisor gleich 1068 und der hierzu gehörige Quotient gleich 6. Setzt man nun zu 1068 sogleich 6, so bekömmt man 10686, und dieses nach dem Gesetze der 6 multiplicirt, gibt 64116.

Hiernach würde das gegebne Beispiel folgende Figur geben:

```
28|58|18|54|44 | 53462
25
---
 358
 103
   3
---
 309
---
  4918
  1064
     4
  ----
  4256
  ----
   66254
   10686
       6
   -----
   64116
   -----
   213844
   106922
        2
   ------
   213844
   ------
   000000
```

2. *Beiſpiel.*

Die gegebene Zahl, woraus die Quadratwurzel gezogen werden ſoll, ſey 54758.

```
5|47|58 } 234
4
-
147
 43
  3
---
 129
---
 1858
  464
    4
 ----
 1856
 ----
    2
```

Hier iſt alſo 234 nicht die ganze Quadratwurzel von 54758, weil am Ende der Reſt 2 übrig bleibt. Es kann aber auch die Wurzel nicht ganz genau gefunden werden, denn ſie iſt gröſser als 234 und kleiner als 235, folglich muſs ſie eine vermiſchte Zahl ſeyn. Es läſst ſich aber keine vermiſchte Zahl angeben, die, zum Quadrate erhoben, eine ganze Zahl gibt (§. 170. 1. Zuſ.), folglich muſs man ſich damit begnügen, daſs man ſich dem wahren Werthe der Wurzel ſo ſehr nähern kann, als es die Natur einer Aufgabe verlangt. Wie nun dieſes geſchehn könne, lehrt §. 183.

§. 183.

Lehrſatz.

Die Quadratwurzel der Einheit von der $2m^{ten}$ Ordnung, iſt die Einheit der m^{ten} Ordnung.

Beweis.

Wenn die Einheit der m^{ten} Ordnung zur zweiten Dignität erhoben wird, ſo entſteht die Einheit der $2m^{ten}$ Ordnung. Denn die Einheit der m^{ten} Ordnung iſt $1 . 10^{m}$, folglich ihr Quadrat gleich $(1 . 10^{m})^{2} = 1 . 10^{2m}$.

1. Zusatz.

Es ist $3 = \frac{3000000}{1000000}$, also $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{3000000}}{1000}$ (§. 152.). Zieht man also aus 3000000 die Quadratwurzel und dividirt sie durch 1000, so bekömmt man die Quadratwurzel aus 3 bis auf Tausendtheilchen.

2. Zusatz.

Hieraus erhellet schon, dass wenn man die Quadratwurzel eines unvollständigen Quadrats bis auf m Decimalstellen berechnen will, dass man ihr 2m Nullen anhängen, aus dieser erhaltenen Zahl die Quadratwurzel ziehn und in dieser Wurzel von der Rechten nach der Linken m Decimalstellen abschneiden muss. Desto grösser alsdenn m ist, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe der Wurzel.

Beispiel.

Es soll die Quadratwurzel aus 2 bis auf Zehntausendtheilchen gesucht werden.

```
2|00|00|00|00 | 14142 . . .
1
-
 100
  24
   4
 ---
  96
 ---
  400
  281
  ---
  11900
   2824
      4
  -----
  11296
  -----
    60400
    28282
        2
    -----
    56564
    -----
     3836  u. s. w.
```

Also

Also die Quadratwurzel aus 2 bis auf Zehntausendtheilchen ist gleich 1,4142.

2. Von der Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 184.

Aufgabe.

Es wird die Kubikwurzel von $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gesucht.

Auflösung.

Nach §. 140. ist die Wurzel gleich $a + b$, die man also aus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, folgendermassen findet: Man sucht die Wurzel des ersten Theils, so findet man den ersten Theil der gesuchten Kubikwurzel, nämlich a. Diesen erhebt man zum Würfel und subtrahirt ihn von $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so bleibt die Differenz $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Wird also a zum Quadrate erhoben, dieses Quadrat nach dem Gesetze der 3 multiplicirt, und des vorigen Restes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ erstes Glied, nach dem Gesetze dieses Producis dividirt, so bekömmt man den zweiten Theil der gesuchten Wurzel, nämlich $+ b$. Werden nun das dreifache Quadrat des ersten Theils, ferner das dreifache des Producis, welches aus dem ersten Theile nach dem Gesetze des zweiten Theils entsteht, und das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel, einzeln nach dem Gesetze von b multiplicirt und die dadurch entstandenen Producte zu einander addirt, so entsteht eine Zahl, die, von der Differenz $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ subtrahirt, 0 gibt.

Aus der folgenden Figur wird man leicht einsehn, wie man das vorgeschriebene Verfahren am bequemsten anwendet.

							1. Theil, 2. Th. d. Wurzel
a^3	$+$	$3a^2b$	$+$	$3ab^2$	$+$	b^3	$a + b$
a^3							
0		$3a^2b$	$+$	$3ab^2$	$+$	b^3	
		$3a^2$	$+$	$3ab$	$+$	b^2	
						b	
		$3a^2b$	$+$	$3ab^2$	$+$	b^3	
		0		0		0	

Zusatz.

Da nun der Würfel einer jeden zweitheiligen Wurzel die Form $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ hat, so ist einleuchtend, daß man auf dem vorgeschriebenen Wege jede binomische Wurzel aus ihrem Würfel finden kann, wenn beide oder einer ihrer Theile unbestimmt gelassen, d. h. durch Buchstaben angegeben sind.

1. Beispiel.

Es sey der gegebene Würfel gleich $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

$$
\begin{array}{c|cccccc|l}
a^3 & + & 3a^2 & + & 3a & + & 1 & a + 1 \\
\hline
0 & & 3a^2 & + & 3a & + & 1 & \\
 & & 3a^2 & + & 3a & + & 1 & \\
 & & & & & + & 1 & \\
\hline
 & & 3a^2 & + & 3a & + & 1 & \\
\hline
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

2. Beispiel.

Der gegebene Würfel sey gleich $a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}$.

$$
\begin{array}{c|cccccc|l}
a^3 & - & \frac{3}{2}a^2 & + & \frac{3}{4}a & - & \frac{1}{8} & a - \frac{1}{2} \\
a^3 & & & & & & & \\
\hline
0 & - & \frac{3}{2}a^2 & + & \frac{3}{4}a & - & \frac{1}{8} & \\
 & & 3a^2 & - & \frac{3}{2}a & + & \frac{1}{4} & \\
 & & & & & - & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & - & \frac{3}{2}a^2 & + & \frac{3}{4}a & - & \frac{1}{8} & \\
\hline
 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

3. Beispiel.

Es sey der gegebene Cubus gleich $c^3 + \frac{9c^2m}{2} + \frac{27cm^2}{4} + \frac{27m^3}{8}$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
c^3 & +\frac{9c^2m}{2}+\frac{27cm^2}{4}+\frac{27m^3}{8} & c+\frac{3m}{2} \\
c^3 & & \\
\hline
0 & \frac{9c^2m}{2}+\frac{27cm^2}{4}+\frac{27m^3}{8} & \\
 & 3c^2+\frac{9cm}{2}+\frac{9m^2}{4} & \\
 & \qquad\qquad\quad +\frac{3m}{2} & \\
\cline{2-2}
 & \frac{9c^2m}{2}+\frac{27cm^2}{4}+\frac{27m^3}{8} & \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

4. *Beispiel.*

Der gegebene Würfel sey gleich $a^3+\frac{9a^2m}{4}+\frac{27am^2}{16}+\frac{27m^3}{64}$.

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^3 & +\frac{9a^2m}{4}+\frac{27am^2}{16}+\frac{27m^3}{64} & a+\frac{3m}{4} \\
a^3 & & \\
\hline
0 & +\frac{9a^2m}{4}+\frac{27am^2}{16}+\frac{27m^3}{64} & \\
 & 3a^2+\frac{9am}{4}+\frac{9m^2}{16} & \\
 & \qquad\qquad\quad +\frac{3m}{4} & \\
\cline{2-2}
 & \frac{9a^2m}{4}+\frac{27am^2}{16}+\frac{27m^3}{64} & \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

§. 185.

Aufgabe.

Es wird die Kubikwurzel aus dem Würfel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$ gesucht.

Auflösung.

Nach §. 140. 4. Zus. ist die Wurzel dieses Würfels gleich $a+b+c+d$. Wie man diese findet, lehrt folgende Figur:

a^3

1. Zusatz.

Es ist $3 = \frac{3000000}{1000000}$, also $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{3000000}}{1000}$ (§. 152.). Zieht man also aus 3000000 die Quadratwurzel und dividirt sie durch 1000, so bekömmt man die Quadratwurzel aus 3 bis auf Tausendtheilchen.

2. Zusatz.

Hieraus erhellet schon, daſs wenn man die Quadratwurzel eines unvollständigen Quadrats bis auf m Decimalstellen berechnen will, daſs man ihr 2m Nullen anhängen, aus dieser erhaltenen Zahl die Quadratwurzel ziehn und in dieser Wurzel von der Rechten nach der Linken m Decimalstellen abschneiden muſs. Desto gröſser alsdenn m ist, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe der Wurzel.

Beispiel.

Es soll die Quadratwurzel aus 2 bis auf Zehntausendtheilchen gesucht werden.

```
2|00|00|00|00 | 14142 . . .
1
-
 100
  24
   4
 ---
  96
  400
  281
  ---
  11900
   2824
      4
  -----
  11296
   60400
   28282
       2
   -----
   56564
   -----
    3836   u. s. w.
```

Also

Also die Quadratwurzel aus 2 bis auf Zehntausendtheilchen ist gleich 1,4142.

2. Von der Ausziehung der Kubikwurzel.

§. 184.

Aufgabe.

Es wird die Kubikwurzel von $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gesucht.

Auflösung.

Nach §. 140. ist die Wurzel gleich $a + b$, die man also aus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, folgendermassen findet: Man sucht die Wurzel des ersten Theils, so findet man den ersten Theil der gesuchten Kubikwurzel, nämlich a. Diesen erhebt man zum Würfel und subtrahirt ihn von $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so bleibt die Differenz $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Wird also a zum Quadrate erhoben, dieses Quadrat nach dem Gesetze der 3 multiplicirt, und des vorigen Restes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ erstes Glied, nach dem Gesetze dieses Products dividirt, so bekömmt man den zweiten Theil der gesuchten Wurzel, nämlich $+ b$. Werden nun das dreifache Quadrat des ersten Theils, ferner das dreifache des Products, welches aus dem ersten Theile nach dem Gesetze des zweiten Theils entsteht, und das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel, einzeln nach dem Gesetze von b multiplicirt und die dadurch entstandenen Producte zu einander addirt, so entsteht eine Zahl, die, von der Differenz $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ subtrahirt, 0 gibt.

Aus der folgenden Figur wird man leicht einsehn, wie man das vorgeschriebene Verfahren am bequemsten anwendet.

				1. Theil, 2. Th. d. Wurzel
a^3	$+ 3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+ b^3$	$a + b$
a^3				
0	$3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+ b^3$	
	$3a^2$	$+ 3ab$	$+ b^2$	
			b	
	$3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+ b^3$	
	0	0	0	

Cuba ... **Wurzel.**

$$a^3 \,|\, + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \,|\, + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \,|\, + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \,|\, a+b+c+d+e$$

$$a^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$3a^2 \quad + 3ab \quad + b^2$$
$$+ b$$

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$3(a+b)^2 \quad + 3(a+b)c \quad + c^2$$
$$+ c$$

$$3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

$$3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$
$$3(a+b+c)^2 \quad + 3(a+b+c)d \quad + d^2$$
$$+ d$$

$$3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$

§. 188.

Lehrsatz.

Wenn M eine Zahl ist, die aus mehrern Ziffern besteht, so fängt sich der Würfel ihrer Ziffer, die Einer enthält, in der Stelle der Einer an.

Beweis.

Die Ziffer der Einer von M heisse p, so ist sie mit $p \cdot 10^0$ gleichgültig, also ihr Würfel ist mit $p^3 \cdot 10^0$ einerlei, oder die geringste Ziffer des Cubus von p enthält Einer.

§. 189.

Lehrsatz.

Ist die geringste Ziffer f einer Zahl M von der n^{ten} Ordnung, so ist die geringste Ziffer ihres Würfels von der Stelle der Einer um 3n Stellen entfernt.

Beweis.

Hier ist f eigentlich gleich $f \cdot 10^n$, folglich f^3 gleich $f^3 \cdot 10^{3n}$, d. h. die geringste Ziffer des Würfels von f ist von der $3n^{ten}$ Ordnung. Soll sie aber von der $3n^{ten}$ Ordnung seyn, so muss sie auch in M^3 von der Stelle der Einer um 3n Stellen entfernt seyn.

1. Zusatz.

Schneidet man also in M^3 von der Rechten nach der Linken immer 3 Stellen ab, so kömmt man gewiss zu der geringsten Ziffer von f^3.

2. Zusatz.

Eine Zahl, die keine Einer, aber Zehner hat, gibt einen Würfel, der sich mit 3 Nullen endigt. Sind auch keine Zehner da, so endigt sich der Würfel mit 6 Nullen u. s. w.

3. Zusatz.

Eine Zahl, welche sich mit einer Anzahl von Nullen endigt, die für 3 nicht theilbar ist, ist ein unvollständiger Würfel.

§. 190.

Lehrsatz.

Wenn e die höchste Ziffer einer Zahl M ist und die n^{te} Ordnung hat, so kann die höchste Ziffer von M^3 von der $3n+2^{ten}$ Ordnung seyn.

Beweis.

Wenn der Zahl M höchste Ziffer e von der n^{ten} Ordnung ist, so läßt sie sich durch $e.10^n$, folglich ihr Würfel durch $e^3.10^{3n}$ ausdrücken. Also die geringste Ziffer von e^3 ist von der $3n^{ten}$ Ordnung. Nun kann e^3 drei Stellen einnehmen, welches der Fall ist, wenn e grösser als 2 ist, folglich kann auch die höchste Ziffer von der $3n+2^{ten}$ Ordnung seyn.

§. 191.

Lehrsatz.

Wenn eine Zahl, deren höchste Ziffer von der n^{ten} Ordnung ist, zum Cubus erhoben wird, so kann die höchste Ziffer dieses Würfels höchstens von der $3n+2^{ten}$ Ordnung seyn.

Beweis.

Daſs ihre höchste Ziffer von der $3n+2^{ten}$ Ordnung seyn kann, beweiset §. 190.; daſs sie aber diese Ordnung nicht überschreiten könne, wird folgendermaſsen bewiesen: Es sey eine Zahl gleich $M = a.10^n + b$, so daſs man sich unter b mehrere Ziffern denken muſs, so ist 1.10^{n+1} grösser als M, also 1.10^{3n+3} grösser als M^3, folglich wenn M^3 eine Ziffer von der Ordnung $3n+3$ hätte, so wäre diese Ziffer grösser als M^3, welches absurd ist.

Zusatz.

Da eine jede Zahl eine Zifferstelle mehr hat, als die Zahl Einheiten in sich begreift, welche sagt, von welcher Ordnung die höchste Ziffer ist, so ist einleuchtend, daſs der Würfel einer Zahl, deren höchste Ziffer die n^{te} Ordnung hat, höchstens $3n+3$ Ziffern haben könne.

§. 192.

Lehrsatz.

Eine Zahl M^3, die $3n+1$ oder $3n+2$ oder $3n+3$ Zifferstellen hat, hat eine Kubikwurzel M von $n+1$ Zifferstellen.

Beweis.

Gesetzt, die Wurzel M hätte nur n Zifferstellen, so wäre ihre höchste Ziffer f von der $n-1^{ten}$ Ordnung, also gleich $f.10^{n-1}$; und daher könnte M^3 nach §. 191. höchstens $3n$ Stellen haben, welches wider die Voraussetzung ist.

Hätte aber M mehrere als $n+1$ Zifferstellen, so mag sie $n+2$ Stellen haben, so wäre ihre höchste Ziffer von der $n+1^{ten}$ Ordnung, also gleich $f.10^{n+1}$, deren Cubus folglich $f^3.10^{3n+3}$ ist, daher M^3 auch wenigstens eine Ziffer von der $3n+3^{ten}$ Ordnung besitzen und daher auch wenigstens $3n+4$ Zifferstellen haben müsste, welches ebenfalls wider die Voraussetzung wäre.

Zusatz.

Man kann also aus der Anzahl der Zifferstellen einer Zahl M^3 sogleich beurtheilen, wie viele Ziffern ihre Kubikwurzel hat, und zwar, um dieses zu erfahren, braucht man nur die Zahl m, welche sagt, wie viele Zifferstellen M^3 besitzt, nach dem Gesetze von 3 zu dividiren. Sollte hier m nicht für 3 divisibel seyn, so muss man zu m so viele Einheiten addiren, als ihr wenigstens gegeben werden müssen, damit sie für 3 theilbar wird.

§. 193.

Wenn die nächst auf einander folgenden Ziffern einer Zahl M folgende sind:

$a.10^n$, $b.10^{n-1}$, $c.10^{n-2}$, $d.10^{n-3}$, $e.10^{n-4}$, u. s. w.

so sind die Würfel dieser Ziffern folgende:

$a^3.10^{3n}$, $b^3.10^{3n-3}$, $c^3.10^{3n-6}$, $d^3.10^{3n-9}$, $e^3.10^{3n-12}$, u. s. w.

folglich

die geringste Ziffer des Cubus der höchsten Ziffer ist von der $3n^{ten}$ Ordnung,

die geringste Ziffer des Kubus der nächstfolgenden ist von der $3n-3^{ten}$ Ordnung,
die geringste Ziffer des Kubus der hierauf folgenden ist von der $3n-6^{ten}$ Ordnung
u. s. w.

Hieraus folgt, daſs wenn M zum Kubus erhoben wird, und man in M^3 die geringste Ziffer des Würfels der geringsten Ziffer von M anzugeben weiſs, daſs man alsdenn auch bestimmen kann, wo sich in M^3 die Würfel der übrigen Ziffern von M anfangen, weil sich der Kubus von der Ziffer p um drei Stellen weiter zur Linken anfängt, als der Kubus von q, wenn q eine um 1 geringere Ordnung als p hat.

§. 194.

Auſser den Würfeln der einzelnen Theile von M kommen noch in M^3 vor:

1) Die dreifachen Producte der Quadrate der Summe der ersten n Theile nach dem Gesetze des $n+1^{ten}$ Theils (§. 140. 4. Zus.).
2) Die dreifachen Producte der Summe der ersten n Theile nach dem Gesetze des Quadrats des nächstfolgenden, also des $n+1^{ten}$ Theils (§. 140. 4. Zus.).

Nennt man nun die zuerst genannten dreifachen Producte P, und bezeichnet die zuletzt genannten mit π, so braucht man nur zu wissen, von welcher Ordnung die geringste Ziffer dieser P und π ist, um ihre Anfangsstellen in M^3 angeben zu können, daher denn auch nur die Ordnung der geringsten Ziffer einer jeden P und π bestimmt werden soll.

§. 195.

Das 1te P ist gleich $3(a.10^n)^2 b.10^{n-1}$.
Das 2te P ist $= 3(a.10^n + b.10^{n-1})^2 c.10^{n-2}$.
Das 3te P $= 3(a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2})^2 d.10^{n-3}$.
Das 4te P $=$

$$3(a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} + d.10^{n-3})^2 e.10^{n-4}.$$

u. s. w.

Ent-

Entwickelt man nun diese P_x so erhellet folgendes:

Die geringste Ziffer des 1ten P ist von der $3n-1^{ten}$ Ordnung.

— — — — — 2ten P — — $3n-4^{ten}$ — —

— — — — — 3ten P — — $3n-7^{ten}$ — —

— — — — — 4ten P — — $3n-10^{ten}$ — —

u. s. w.

Folglich fängt sich in M^3 ein höheres P allemal um 3 Stellen weiter zur Linken an, als ein nächstgeringeres.

Das 1te π ist $= 3(a.10^n).b^2.10^{2n-2}$.

Das 2te π $= 3(a.10^n + b.10^{n-1})c^2.10^{2n-4}$.

Das 3te π $= 3(a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2})d^2.10^{2n-6}$.

Das 4te π $=$

$3(a.10^n + b.10^{n-1} + c.10^{n-2} + d.10^{n-3})e^2.10^{2n-8}$.

Entwickelt man diese π, so findet man folgende Gesetze:

Die geringste Ziffer des 1ten π ist von der $3n-2^{ten}$ Ordnung.

— — — — — 2ten π — — $3n-5^{ten}$ — —

— — — — — 3ten π — — $3n-8^{ten}$ — —

— — — — — 4ten π — — $3n-11^{ten}$ — —

Also auch ein höheres π fängt sich allemal in M^3 um 3 Stellen weiter zur Linken an, als ein nächstniedrigeres π.

§. 196.

Da also die geringste Ziffer des höchsten Würfels in M^3 von der $3n^{ten}$ Ordnung (§. 193.), die geringste Ziffer des höchsten P von der $3n-1^{ten}$ Ordnung (§. 195.), und die des höchsten π von der $3n-2^{ten}$ Ordnung ist (§. 195.), so folgt aus §. 193. und §. 195., dass wenn M zum Kubus erhoben wird, und man in M^3 die geringste Ziffer des höchsten Würfels anzugeben weiss, dass man dann nicht nur die Anfangsstelle des höchsten P und des höchsten π kennt, sondern auch die Anfangsstellen der übrigen Würfel, der übrigen P und der übrigen π bestimmen kann.

§. 197.

Es sey daher $M^3 =$ mnpqrsmnovtu, so dass m, n, p, q, r u. s. w. die Ziffern der Zahl M^3 bedeuten, die sich nicht mit 0 endigen soll, so ist einleuchtend, dass man von der Rech-

ten nach der Linken Klassen abtheilt, deren eine jede 3 Ziffern besitzt, dass alsdann in mnp|qrs|mno|vtu eine jede Klasse die Anfangsstelle des Würfels einer Ziffer von M, die Anfangsstelle eines P und die Anfangsstelle eines π enthält. Denn es besitzt M so viele Zifferstellen, als M^3 Klassen hat (§. 192. Zus.), ferner fängt sich der Würfel der geringsten Ziffer in u (§. 188.), folglich der Würfel der nächsthöhern Ziffer in o (§. 193.) u. s. w. an, so dass sich der Würfel der höchsten Ziffer in p anfangen muss. Das höchste P fängt sich in q an (§. 196.), also das nächstfolgende in m, und das letzte in t (§. 195.). Das höchste π fängt sich in r an (§. 196.), also das nächstfolgende in n und das letzte in t (§. 195). Theilt man also eine Zahl, die sich nicht mit o endigt, von der Rechten nach der Linken in Klassen ab, deren jede drei Ziffern besitzt, so kann man in ihr die Anfangsstellen der einzelnen Würfel, der P und der π bestimmen. Sollte die gegebene Zahl ein vollständiger Würfel seyn, so würde dies nach §. 189. 1. Zus. ebenfalls der Fall seyn, wenn sie sich auch mit o endigte. Da nun ein unvollständiger Kubus bei der Ausziehung der Kubikwurzel, als ein vollständiger Würfel angesehn werden muss, so ist einleuchtend, dass wenn in einer Zahl, deren Kubikwurzel gesucht wird, von der Rechten nach der Linken immer drei und drei Stellen abgeschnitten werden, dass dadurch auf die vorhin angegebene Weise jedesmal die Anfangsstellen der Würfel, der P und der π bestimmt werden.

§. 198.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl die Kubikwurzel zu ziehn.

Auflösung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Klassen, deren eine jede drei Zifferstellen besitzt.

2) Man suche eine Zahl a, deren Würfel entweder gleich der Zahl der ersten Klasse, oder doch als Würfel die ihr zunächst kleinere ist. Diese Zahl ist die höchste Ziffer der verlangten Kubikwurzel.

3) Die-

3) Diese gefundene Ziffer erhebe man zum Kubus und ziehe diesen von der Zahl der ersten Klasse ab. Zu dem Reste ziehe man die Ziffern der zweiten Klasse herunter und setze das dreifache Quadrat des erst gefundenen Theils der Wurzel, nämlich $3a^2$ so hierunter, daſs die geringste Stelle von $3a^2$ unter der höchsten der zweiten Klasse steht. Nun dividire man den Theil der über $3a^2$ stehenden Zahl, dessen geringste Stelle die höchste der zweiten Klasse ist, nach dem Gesetze der $3a^2$ und nehme den Quotienten b zur zweiten Ziffer der verlangten Kubikwurzel an. Hierauf erhebe man b zum Cubus und setze diesen so unter die zweite Klasse, daſs seine geringste Stelle unter der geringsten dieser Klasse steht. Ist dieses geschehn, so wird 3a nach dem Gesetze des Quadrats von b multiplicirt und $3ab^2$ so unte b^3 gesetzt, daſs sich die geringste Stelle von $3ab^2$ unter der zweiten Ziffer der zweiten Klasse befindet. Zuletzt multiplicirt man den Divisor $3a^2$ nach dem Gesetze von b und gibt dem Producte $3a^2b$ eine solche Stellung unter $3ab^2$, daſs seine geringste Stelle unter die höchste der zweiten Klasse kömmt. In der Stellung, welche hier $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 unter sich haben, werden sie zu einander addirt, und die Summe wird von der Zahl subtrahirt, welche über dem Divisor $3a^2$ steht. Ist die Summe von $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 gröſser als die Zahl, wovon sie subtrahirt werden soll, so ist b zu groſs angenommen; bleibt aber nichts übrig, oder ist doch der Rest kleiner als $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so ist b die richtige zweite Ziffer der gesuchten Wurzel.

4) Zu der Differenz, welche nach dem Abzuge der $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ übrig geblieben ist, setze man die Ziffern der dritten Klasse, und nehme das Dreifache des Quadrats von $a + b$ und setze dieses $3(a + b)^2$ so unter die Zahl, die aus der Differenz und den Ziffern der dritten Klasse besteht, daſs die geringste Stelle von $3(a + b)^2$ unter der höchsten der dritten Klasse steht. Nun dividire man den Theil der über $3(a + b)^2$ befindlichen Zahl, dessen geringste Stelle die höchste der dritten Klasse ist, nach dem

[illegible] den Quotienten c zur [illegible] an. Alsdenn erhe- [illegible] nach dem Gese- [illegible] von c, und setze [illegible] $(a+b)^2$, dass [illegible] dass die [illegible] höhern, [illegible] unter der [illegible] der Stellung, [illegible] unter sich [illegible] der ganzen [illegible] steht. [illegible] wovon sie sub- [illegible] angenommen, ist [illegible] kleiner als [illegible] Ziffer [illegible]

[illegible] $3(a+b)$ [illegible] mit der [illegible] nach dem Gesetze [illegible] man die vierte Ziffer u. s. w.

[illegible] so ist die gegebene Zahl ein [illegible] die Wurzel ist ganz genau ge- [illegible]

Au[illegible] ziehn.

[illegible] Verfahrens erhellet

1) Man the[illegible] Linken [illegible] besitzt.

2) Man suche [illegible] der Zahl der [illegible] zunächst kleiner [illegible] der verlangten Kub[illegible]

Beispiel I.

[illegible] der Zahl 15280431020 7128

Gege-

[redacted]

Gegebene Zahl.	Wurzel.
152 804 310 207 128	5 3 4 6 2

$a^3 = 125$

27804

1ter Div. $= 3a^2 = (75)$

$b^3 = 27$

$3ab^2 = 135$

$3a^2b = 225$

23877

3927310

2ter Div. $= 3(a+b)^2 = (8427)$

$c^3 = 64$

$3(a+b)c^2 = 2544$

$3(a+b)^2c = 33708$

3396304

531006207

3ter Div. $= 3(a+b+c)^2 = (855468)$

$d^3 = 216$

$3(a+b+c)d^2 = 57672$

$3(a+b+c)^2d = 5132808$

513857736

17148471128

4ter Div. $= 3(a+b+c+d)^2 = (85739148)$

$e^3 = 8$

$3(a+b+c+d)e^2 = 64152$

$3(a+b+c+d)^2e = 171478296$

17148471128

00000000000

2. *Beiſpiel.*

Es ſey die gegebene Zahl gleich 34012236.

```
34|012|236 ] 324.
27
  7012
  (27)
     8
    36
   54
  5768
  1244236
  (3072)
      64
    1536
  12288
  1244224
       12
```

Hier iſt alſo 324 nicht die ganze Kubikwurzel von 3401236, weil am Ende der Reſt 12 übrig bleibt, ſondern ſie iſt gröſser als 324, und kleiner als 325. Es kann aber auch hier aus eben den Gründen die Wurzel nicht genau gefunden werden, aus welchen ſich die Quadratwurzel einer ganzen Zahl nicht völlig finden läſst, wenn die Wurzel keine ganze Zahl iſt. Daher muſs man ſich auch hier damit begnügen, daſs man ein Mittel ſucht, ſich der Wahrheit ſo ſehr zu nähern, als nothwendig iſt.

§. 199.

Lehrſatz.

Die Kubikwurzel der Einheit von der 3m^ten Ordnung, iſt die Einheit der m^ten Ordnung.

Beweis.

Wenn die Einheit der m^ten Ordnung zur dritten Dignität erhoben wird, ſo entſteht die Einheit der 3m^ten Ordnung. Denn die Einheit der m^ten Ordnung iſt $1 \cdot 10^m$, folglich ihr Kubus gleich $(1 \cdot 10^m)^3 = 1 \cdot 10^{3m}$.

1. Zu-

1. Zusatz.

Es ist $4 = \frac{4000000000}{1000000000}$, also $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{4000000000}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{4000000000}}{1000}$ (§. 152.).

Zieht man also aus 4000000000 die Kubikwurzel und dividirt sie durch 1000, so bekömmt man die Kubikwurzel aus 4 bis auf Tausendtheilchen.

2. Zusatz.

Hieraus erhellet schon, daſs, wenn man die Kubikwurzel eines unvollständigen Cubus bis auf m Decimalstellen berechnen will, daſs man ihr 3m Nullen anhängen, aus dieser erhaltenen Zahl die Kubikwurzel ziehn und in dieser Wurzel von der Rechten nach der Linken m Decimalstellen abschneiden muſs. Desto gröſser alsdenn m ist, desto mehr nähert man sich dem wahren Werthe der Wurzel.

Beispiel.

Es wird die Kubikwurzel aus 3 bis auf Zehntausendtheilchen verlangt.

3 | 000 | 000 | 000 | 000) 14422

1

2000

(3)

64

48

12

1744

256000

(588)

64

672

2352

241984

14016000

(62208)

8

1728

124416

12458888

1557112000

(6238092)

8

17304

12476184

1247791448

309320552

Also die Kubikwurzel aus 3 bis auf Zehntausendtheilchen ist gleich 1,4422.

§. 200.

Wenn man untersucht, wie die Regel für die Ausziehung der Quadratwurzel aus der Formel für $(a+b)^2$ und die Regel für die Ausziehung der Kubikwurzel $(a+b)^3$ hergeleitet ist, so wird man leicht einsehn, wie die Regeln für die Ausziehung der

der Wurzeln höherer Dignitäten aus den Formeln für diese D[illegible]gnitäten hergeleitet werden können. Auch kann man [illegible] Fällen, wenn der Wurzelexponent eine zusammengesetzte Zahl ist, von §. 158. 2. Zusatz Gebrauch machen. Soll z. B. die Wurzel der 6ten Dignität aus 8 gezogen werden, so ist $\sqrt[6]{8} = \sqrt{(\sqrt[3]{8})}$. In der Folge wird noch gezeigt werden, wie man die Wurzeln aller Dignitäten vermittelst der Logarithmen finden kann.

Zehntes Kapitel.

Von den Progressionen.

1. Von den Progressionen überhaupt.

§. 201.

Erklärung.

Wenn eine Reihe von Zahlen so beschaffen, dass immer jede eine Zahl aus der nächstvorhergehenden nach einem und dem [illegible]lichen Gesetze hergeleitet wird, so heisst die Reihe eine Progression. Ist das Gesetz, was man [illegible] zum Grunde gelegt hat, ein solches, dass zwischen [illegible] nächst einander folgenden Zahlen ein und [illegible] Verhältniss statt findet, so heisst die Progression [illegible]metische, und die Differenz des arithmetischen [illegible] ses, heisst alsdenn die Differenz der arithmet[illegible] tion. Ist aber das Grundgesetz der Reihe von [illegible] für allemal zwischen zweien zunächst auf einander [illegible] Zahlen das geometrische Verhältniss und [illegible] zwischen andern zunächst auf einander [illegible] so heisst die Progression eine geometrische [illegible] der des zum Grunde liegenden geometrischen [illegible] dann der Exponent der Progression. [illegible] die Progression ausmachen, werden [illegible] der [illegible]

Progression mag seyn, was für eine man will. Die Glieder nehmen nun entweder in der Progression von der Linken nach der Rechten zu, oder sie nehmen von der Linken nach der Rechten ab. Im ersten Falle wird sie eine *zunehmende*; im zweiten Falle wird sie eine *abnehmende Progression* genannt.

2. Von der arithmetischen Progression.

§. 202.

Wenn man das erste Glied einer arithmetischen Progression gleich a, ihre Differenz gleich d setzt, so sieht man leicht ein, dass die zu nehmende Progression durch

$a; a+d; a+2d; a+3d; \cdots a+(n-3)d; a+(n-2)d; a+(n-1)d$

und die abnehmende Progression durch

$a; a-d; a-2d; a-3d; \cdots a-(n-3)d; a-(n-2)d; a-(n-1)d$

dargestellt wird.

Es ist daher $a \mp (n-1)d$ ein allgemeiner Ausdruck für das n^{te} Glied einer jeden arithmetischen Progression.

1. Zusatz.

Der allgemeine Ausdruck für das r^{te} Glied, vom ersten Gliede an gerechnet, ist gleich $a \mp (r-1)d$, und der allgemeine Ausdruck für das r^{te} Glied, vom letzten an gerechnet, ist gleich $a \mp (n-r)d$.

2. Zusatz.

Ist die Anzahl der Glieder ungrade, so gibt es ein mittleres Glied. Es sey daher $n = 2m+1$, so ist das mittlere Glied das $m+1^{te}$, folglich sein allgemeiner Ausdruck gleich $a \mp md$.

§. 203.

Lehrsatz.

Die Summe des ersten und letzten Gliedes, oder welches einerlei ist, der beiden äusserten Glieder, ist gleich der Summe irgend zweier Glieder, wovon das eine so weit von dem ersten Gliede absteht, wie das zweite vom letzten entfernt ist.

Be-

Beweis.

Es ſey das erſte Glied der zunehmenden und abnehmenden Progreſſion gleich a, die Anzahl der Glieder in jeder der beiden Progreſſionen gleich n, ſo iſt die allgemeine Formel für das letzte Glied gleich $a \mp (n-1)d$, (§. 202.) und für das r^{te} Glied, vom erſten an gerechnet, gleich $a \mp (r-1)d$, und für das r^{te} Glied, vom letzten an gerechnet, gleich $a \mp (n-r)d$ (§. 202. 1. Zuſ. ~~und 2.~~ Zuſ.)

Folglich iſt die allgemeine Formel für die Summe des erſten und letzten Gliedes gleich $a + a \mp (n-1)d = 2a \mp (n-1)d$ und für die Summe der beiden r^{ten} Glieder gleich $a \mp (r-1)d + a \mp (n-r)d = 2a \mp (r-1)d \mp (n-r)d = 2a \mp (r-1+n-r)d = 2a \mp (n-1)d$.

Es iſt alſo ſowohl die Summe der beiden äuſserſten, als die Summe der beiden r^{ten} Glieder gleich $2a \mp (n-1)d$, und daher iſt die Richtigkeit des Lehrſatzes bewieſen.

1. *Zuſatz.*

Wenn die Anzahl der Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion gleich 2m iſt, ſo iſt die Summe des erſten und letzten Gliedes in der Summe aller Glieder, m mal enthalten. Oder wenn man das erſte Glied a, das letzte u und die Summe aller Glieder S nennt, ſo iſt $a + u : S = 1 : m$, folglich iſt auch $S = m(a+u)$.

2. *Zuſatz.*

Hat die Progreſſion $2m + 1$ Glieder, ſo beſteht ihre Summe aus m Summen des erſten und letzten Gliedes und aus dem mittlern Gliede, alſo iſt hier

$$S = m(a+u) + a \mp md \quad \text{(§. 202. 2. Zuſ.)}$$

Aber es iſt hier $a + u = 2a \mp 2md$ (§. 202. 2. Zuſ.),

alſo $\frac{1}{2}(a+u) = a \mp md$.

Daher

Daher ist auch $S = m(a+u) + \frac{1}{2}(a+u)$
$= (m+\frac{1}{2})(a+u)$.

3. *Zusatz.*

Aus dem ersten und zweiten Zusatze folgt, dass die Summe aller Glieder einer jeden arithmetischen Progression ein Product ist, was man erhält, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes nach dem Gesetze der halben Zahl multiplicirt, welche sagt, wie viele Glieder die Progression hat.

4. *Zusatz.*

Es bedeute N sowohl eine grade als ungrade Zahl, und zeige die Anzahl der Glieder einer jeden arithmetischen Progression an, so ist

$$S = (a+u)\frac{N}{2}, \text{ also } 2S = (a+u)N,$$

~~so ist~~ daher auch $2S = aN + uN$,

$$\text{folglich } a = \frac{2S-uN}{N} = \frac{2S}{N} - u$$

$$u = \frac{2S-aN}{N} = \frac{2S}{N} - a$$

$$N = \frac{2S}{a+u}.$$

Also wenn S, N und u gegeben sind, so kann man a finden, und wenn S, N und a gegeben sind, so kann man u finden, und wenn S, u und a bekannt sind, so ist es auch N.

Da nun S durch a, u und N gefunden wird, so ist allgemein wahr, dass wenn von den vier Stücken a, u, N und S, drei Stücke gegeben sind, dass sich alsdenn das vierte finden lässt.

5. *Zusatz.*

Aus $u = a + (N-1)d$ (§. 202. ~~1. Zus.~~) folgt
$u = a + Nd - d$, oder
$a + Nd - d = u$, also ist

a =

$$a = u - Nd + d = u - (N-1)d$$

$$N = \frac{u+d-a}{d} = \frac{u-a}{d} + 1$$

$$d = \frac{u-a}{N-1} = (u-a) \cdot \frac{1}{N-1}$$

Sind also von den vier Stücken, a, d, N, u, drei Stücke gegeben, so ist auch das vierte Stück bekannt.

Nun wird aber S durch a, u und N bestimmt, folglich wird es auch S durch drei Stücke von a, u, N und d. Die vier Stücke, a, u, N, S, bestimmen sich aber unter einander, folglich muss auch das nämliche von a, u, N, S und d gelten.

Sind also von a, u, N, S und d drei Stücke gegeben, so lassen sich vermittelst dieser, die beiden übrigen finden.

Anmerkung.

Wie man aber aus a, d und S die Zahlen n und u findet, kann hier nicht gezeigt werden, weil hierzu die Aufhebung einer quadratischen Gleichung gehört, welche ein Gegenstand der Algebra ist.

§. 204.

Lehrsatz.

Wenn $A = a \cdot (a+d) \cdot (a+2d) \cdot \cdot \cdot (a+(n-1)d)$
und $B = (a+d) \cdot (a+2d) \cdot \cdot \cdot (a+(n-1)d)(a+nd)$

so ist $B - A = \frac{A}{a} \cdot nd.$

Beweis.

Es ist $B = \frac{A}{a} \cdot (a+nd)$, also

$$B - A = \frac{A}{a}(a+nd) - A$$

$$= \frac{Aa}{a} + \frac{And}{a} - \frac{aA}{a}$$

$$= \frac{And}{a} = \frac{A}{a} \cdot nd$$

Haben

Haben alſo zwei zunehmende arithmetiſche Progreſſionen eine gleiche Anzahl Glieder und einerlei Differenz, die zweite Progreſſion hat aber zu ihrem erſten Gliede das zweite Glied der erſten, ſo iſt die Differenz des Products der Glieder der zweiten Progreſſion von dem Producte der Glieder der erſten Progreſſion, ein Product, was folgende zwei Factoren enthält: Der erſte iſt der Quotient des Products der Glieder der erſten Progreſſion nach dem Geſetze ihres erſten Gliedes, und der zweite iſt ein Product der gemeinſchaftlichen Differenz nach dem Geſetze der Zahl, welche ſagt, wie viele Glieder eine dieſer Progreſſionen hat.

---

3. Von der geometriſchen Progreſſion.

§. 205.

Wenn man das erſte Glied einer geometriſchen Progreſſion gleich α, ihren Exponenten gleich ε ſetzt, ſo entſteht die zunehmende Progreſſion von ν Gliedern:

$$\alpha,\ \alpha\varepsilon,\ \alpha\varepsilon^2,\ \alpha\varepsilon^3,\ ------\ \alpha^{\nu-2},\ \alpha^{\nu-1}.$$

Wird aber der Exponent gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ geſetzt, ſo entſteht die abnehmende Progreſſion:

$$\alpha,\ \frac{\alpha}{\varepsilon},\ \frac{\alpha}{\varepsilon^2},\ \frac{\alpha}{\varepsilon^3},\ \frac{\alpha}{\varepsilon^4}\ ------\ \frac{\alpha}{\varepsilon^{\nu-2}},\ \frac{\alpha}{\varepsilon^{\nu-1}}.$$

Es iſt alſo $\alpha\varepsilon^{\nu-1}$ ein allgemeiner Ausdruck für das ν^{te} Glied der zunehmenden, und $\frac{\alpha}{\varepsilon^{\nu-1}}$ iſt ein allgemeiner Ausdruck für das ν^{te} Glied der abnehmenden geometriſchen Progreſſion. Setzt man in $\alpha e^{\nu-1}$, für e die Zahl ε, ſo entſteht $\alpha\varepsilon^{\nu-1}$; ſetzt man aber für e, die Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$, ſo bekömmt man $\alpha \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} = \frac{\alpha}{\varepsilon^{\nu-1}}$. Daher begreift $\alpha e^{\nu-1}$ ſowohl das ν^{te} Glied der zunehmenden, als abnehmenden geometriſchen Progreſſion in ſich.

Willkührlicher Satz.

Inskünftige soll durch a beständig das erste Glied, durch u das letzte Glied, durch e der Exponent, durch S die Summe aller Glieder und durch n die Anzahl der Glieder angegeben werden, wenn weder die Rede von einer graden noch ungraden Anzahl ist.

1. *Zusatz.*

Ein allgemeiner Ausdruck von u durch a und n ist

$$u = ae^{n-1} \quad \text{folglich ist}$$

$$a = \frac{u}{e^{n-1}} \quad \text{und}$$

$$e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}.$$

Sind also von den drei Stücken, a, e, u, zwei Stücke gegeben und ist außerdem noch n bekannt, so läßt sich eine jede der drei Zahlen a, e, u und n. Wie die Zahl n durch a, e und u gefunden wird, kann leicht mit Hülfe des §. [illegible] Zus. gezeigt werden.

2. *Zusatz.*

Der allgemeine [illegible] ist [illegible], ist daher die Anzahl der Glieder [illegible], [illegible] so ist das [illegible] Glied [illegible], und das letzte Glied u gleich [illegible].

[illegible]

Man [illegible]

3. *Zusatz.*

[illegible]

Sind

Sind daher von den drei Stücken, a, u und M, zwei gegeben, so läßt sich das dritte finden.

4. Zusatz.

Das r^{te} Glied, vom ersten an gerechnet, ist gleich ae^{r-1}, das r^{te} Glied, vom letzten an gerechnet, ist gleich ae^{n-r}, folglich ist das Product der beiden r^{ten} Glieder gleich a^2e^{n-1}.

Aber das Product des ersten und letzten Gliedes ist auch gleich a^2e^{n-1}, folglich ist das Product der beiden äussersten Glieder gleich dem Producte zweier Glieder, die von den beiden äussersten einerlei Entfernung haben.

5. Zusatz.

Wenn die Anzahl der Glieder gleich $2m$ ist, P das Product aller Glieder und p das Product zweier Glieder bedeutet, die von den beiden äussersten gleich weit entfernt sind, so ist

$P = p^m$. Da nun $p = au$ (4. Zus.),

so ist auch $(au)^m = P$,

$$\text{also}\quad au = \sqrt[m]{P}$$

$$a = \frac{\sqrt[m]{P}}{u}$$

$$u = \frac{\sqrt[m]{P}}{a}.$$

Ist die Anzahl der Glieder ungrade, gleich $2m+1$, so ist das mittlere Glied gleich $\sqrt{au}$ (2. Zus.), folglich ist hier $P = (au)^m . \sqrt{au} = \sqrt{(au)^{2m}} . \sqrt{au} = \sqrt{(au)^{2m+1}}$,

$$\text{also}\quad (au)^{2m+1} = P^2$$

$$au = \sqrt[2m+1]{P^2}$$

$$a = \frac{\sqrt[2m+1]{P^2}}{u}$$

$$u = \frac{\sqrt[2m+1]{P^2}}{a}$$

§. 206.

Lehrsatz.

Es ist $S - u : S - a = 1 : e$.

Beweis.

$$
\begin{array}{lcccc}
a & : & ae & = & a : ae \\
ae & : & ae^2 & = & a : ae \\
ae^2 & : & ae^3 & = & a : ae \\
ae^3 & : & ae^4 & = & a : ae \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
ae^{n-2} & : & ae^{n-1} & = & a : ae \\
\hline
a + ae + ae^2 + \cdots + ae^{n-2} & : & ae + ae^2 + \cdots + ae^{n-1} & = & a : ae \\
 & & & = & 1 : e
\end{array}
$$

Aber es ist $a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + ae^{n-2} = S - u$
und $ae + ae^2 + ae^3 + \cdots\cdots + ae^{n-1} = S - a$
folglich ist auch $S - u : S - a = 1 : e$.

1. Zusatz.

Es ist $Se - ue = S - a$
und $Se - S = ue - a$
oder $(e - 1)S = ue - a$
folglich $S = \dfrac{ue - a}{e - 1}$.

Man erhält daher die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, wenn man das letzte Glied nach dem Gesetze des Exponenten multiplicirt, von dem Producte das erste Glied subtrahirt, und den Rest nach dem Gesetze einer Zahl dividirt, welche gleich dem Exponenten weniger 1 ist.

Ist daher $e = \dfrac{1}{\varepsilon}$, so wird

$$S = \frac{u \cdot \frac{1}{\varepsilon} - a}{\frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{(u - a\varepsilon) : \varepsilon}{(1 - \varepsilon) : \varepsilon}$$

$$= \frac{u - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Es ist also $S = \dfrac{u - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ die Formel für die Summe der abnehmenden Progression (§. 105.). Da nun hier ε eine ganze Zahl, grösser als 1 ist, so wird aus $1 - \varepsilon$ eine negative Zahl.

Zahl, und $u-a\varepsilon$ wird ebenfalls negativ, weil u kleiner als ist. Man multiplicire daher Zähler und Nenner nach dem (setze von -1, so entsteht $\frac{a\varepsilon-u}{\varepsilon-1}$, welcher Ausdruck n $\frac{u-a\varepsilon}{1-\varepsilon}$ gleichbedeutend ist, worin aber Zähler und Nenner po tiv sind.

2. *Zusatz.*

$$\text{Da}\quad S = \frac{ue-a}{e-1}$$

$$\text{so ist}\quad a = (1-e)S + ue$$

$$u = \frac{S(e-1)+a}{e}$$

$$e = \frac{a-S}{u-S} = \frac{S-a}{S-u}.$$

$$\text{Für}\quad S = \frac{a\varepsilon-u}{\varepsilon-1},\quad \text{ist}$$

$$a = \frac{S(\varepsilon-1)+u}{\varepsilon}$$

$$u = a\varepsilon - S(\varepsilon-1)$$

$$\varepsilon = \frac{S-u}{S-a}.$$

Sind also in einer geometrischen Progression, sie sey ein zunehmende oder abnehmende, von den vier Stücken, S, a, u und e, drei Stücke gegeben, so läßt sich das vierte finden.

Eilf-

Eilftes Kapitel.
Lehre von den Logarithmen.

1. Von den Logarithmen überhaupt.

§. 207.

Erklärung.

Wenn man in der geometrischen Progression

$A;\ AE;\ AE^2;\ AE^3;\ AE^4;\ \text{---}\ AE^r\ \text{---}\ AE^{n-1}$

zählt, wie oft das Verhältniss A : AE zwischen dem ersten Gliede A und irgend einem andern Gliede $AE^r = N$ liegt, so heisst die Zahl, die dieses bestimmt, der **Logarithmus** von N. N kann aber ein Glied verschiedener Progressionen seyn, und nachdem also die dabei zum Grunde gelegten Verhältnisse verschieden sind, nachdem wird auch N in einer Progression ein m^{tes} und in einer andern ein n^{tes} Glied seyn können. Ist aber dieses der Fall, so hat N als Glied einer Progression einen andern Logarithmus, als sie als ein Glied einer andern Progression hat; soll man sich also unter dem Logarithmus von N etwas bestimmtes denken, so muss N als ein Glied einer bestimmten Progression gedacht werden. Eine Progression ist aber bestimmt, wenn festgesetzt wird, nach was für einem Gesetze ihre Glieder fortlaufen sollen, oder was für ein Verhältniss dabei zum Grunde liegen soll, daher muss dieses Verhältniss bestimmt werden. Ein solches Verhältniss wird das Grundverhältniss genannt, und die Logarithmen, die nach ihm den verschiedenen Zahlen zukommen, machen ein **logarithmisches System** aus.

§. 208.

Das Grundverhältniss kann ganz nach Willkühr angenommen werden, am zweckmässigsten ist es aber, ein solches festzusetzen, dessen erstes Glied kleiner als das zweite ist. Da nun in der Progression jede zwei zunächst auf einander folgende

Glieder das Verhältniſs haben, was zwiſchen den beiden erſten ſtatt findet, ſo iſt einleuchtend, daſs ihr erſtes Glied das kleinſte iſt und die andern deſto gröſser ſind, je weiter ſie ſich von dem erſten entfernen. Die Gröſse eines Gliedes hängt alſo von ſeiner Entfernung vom erſten Gliede ab, folglich haben gleiche Zahlen, gleiche, gröſsere Zahlen, gröſsere, und kleinere Zahlen, kleinere Logarithmen, und umgekehrt, gleiche Logarithmen gehören zu gleichen, gröſsere Logarithmen zu gröſsern, und kleinere Logarithmen zu kleinern Zahlen.

§. 209.

Nimmt man das erſte Glied des Grundverhältniſſes gleich 1 an, ſo ſind alle Glieder der Progreſſion, Dignitäten des zweiten Gliedes, und ihre Exponenten ſagen, wie oft ſich das Grundverhältniſs zwiſchen ihnen und dem erſten Gliede 1 befindet. Aus dieſem Grunde wählt man auch ein ſolches zum Grundverhältniſſe, und nennt ſein zweites Glied, was eine ganze Zahl iſt, die Baſis des logarithmiſchen Syſtems. Inskünftige ſoll, ſo lange noch von den Logarithmen überhaupt geſprochen wird, das Verhältniſs 1 : a als Grundverhältniſs gedacht werden.

§. 210.

Zuſatz.

Iſt alſo N eine Dignität von a, ſo iſt der Exponent dieſer Dignität der Logarithmus von N (§. 209.). Es kann aber eine jede Zahl als eine Dignität von a angeſehn werden (§. 132.), folglich hat auch eine jede Zahl für die Baſis a einen Logarithmus.

Willkührlicher Satz.

Wenn n der Logarithmus von N iſt, ſo wird dieſes durch $n = \text{Log } N$ oder durch $n = LN$ angezeigt.

§. 211.

Lehrſatz.

Der Logarithmus von a iſt gleich 1, und der Logarithmus von 1 iſt gleich Null.

Be-

Beweis.

Es ist Log a = 1, weil a von sich selbst die erste Dignität ist (§. 108. 4. Erkl.) und Log 1 = 0, weil 1 = a^0 ist (§. 208. 6. Zus.).

§. 212.

Lehrsatz.

Der Logarithmus eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

Beweis.

Es sey Lp = m und Lq = n, so ist nach §. 209. p = a^m und q = a^n, folglich pq = a^{m+n}, also Lpq = m + n; oder da m = Lp und n = Lq ist, so ist auch Lpq = Lp + Lq.

1. *Zusatz.*

Wenn D : d = Q, so ist D = dQ, folglich LD = LdQ, oder LD = Ld + LQ, also LD — Ld = LQ.

Oder es wird der Logarithmus eines Quotienten gefunden, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividends subtrahirt.

2. *Zusatz.*

Da eine gebrochne Zahl für einen Quotienten, der Zähler für ein Dividend und der Nenner für einen Divisor angesehn werden kann (§. 37. 4. Zus.), so erhält man den Logarithmus einer gebrochnen Zahl, wenn man von den Logarithmus des Zählers, den Logarithmus des Nenners subtrahirt. Hieraus folgt, dass der Logarithmus einer jeden eigentlichen gebrochnen Zahl negativ ist, und dass ihr Logarithmus der negative des Nenners ist, wenn sie die Einheit zum Zähler hat.

§. 213.

Lehrsatz.

Der Logarithmus einer Dignität ist ein Product des Logarithmus ihrer Wurzel nach dem Gesetze ihres Exponenten.

Beweis.

Es sey die gegebene Dignität $p^r = a^n$, so ist $Lp^r = La^n$, oder $Lp^r = n$.

Wenn aber $p^r = a^n$, so ist auch $p = \sqrt[r]{a^n} = a^{\frac{n}{r}}$, also $Lp = La^{\frac{n}{r}}$, oder $Lp = \frac{n}{r}$.

Es entsteht also der Logarithmus von p^r aus dem für p, wenn man Lp nach dem Gesetze von r multiplicirt, oder es ist $Lp^r = rLp$.

Zusatz.

Es ist $\sqrt[m]{p^n} = p^{\frac{n}{m}}$, also $L\sqrt[m]{p^n} = Lp^{\frac{n}{m}}$, folglich auch $L\sqrt[m]{p^n} = \frac{n}{m}Lp$.

Oder es wird der Logarithmus einer Wurzelgröfse gefunden, wenn man den Logarithmus der Gröfse unter dem Wurzelzeichen nach dem Gesetze des Wurzelexponenten dividirt.

§. 214.

Lehrsatz.

Zwei Logarithmen eines gewissen Systems stehn in dem Verhältnisse zu einander, in welchem zwei Logarithmen eines andern Systems unter sich sind, die den nämlichen Zahlen zugehören.

Beweis.

Es sey in einem Systeme, dessen Basis a ist, $p = Lm$ und $q = Ln$.

Und in dem Systeme, dessen Basis α ist, sey $\pi = Lm$ und $\varrho = Ln$.

So ist nach dem ersten Systeme $m = a^p$ und $n = a^q$, und nach dem zweiten Systeme ist $m = a^\pi$ und $n = \alpha^\varrho$, folglich $a^p = \alpha^\pi$ und $a^q = \alpha^\varrho$. Hieraus folgt, dafs 1) $a = \sqrt[p]{\alpha^\pi}$ und dafs 2) $a = \sqrt[q]{\alpha^\varrho}$, also dafs $\sqrt[p]{\alpha^\pi} = \sqrt[q]{\alpha^\varrho}$, oder $\alpha^{\frac{\pi}{p}} = \alpha^{\frac{\varrho}{q}}$ ist, folglich ist auch $\frac{\pi}{p} = \frac{\varrho}{q}$, und daher $\pi : p = \varrho : q$, und $\pi : \varrho = p : q$, oder Lm für Bas. α : Ln für Bas. α = Lm für Bas. a : Ln für Bas. a.

1. Zu-

1. Zusatz.

Es ist $\text{Lm für Bas } \alpha = \frac{\text{Lm für Bas. a} \times \text{Ln für Bas. } \alpha}{\text{Ln für B. a}}$.

Nun sey $n = \alpha$, so erhält man

$$\text{Lm für Bas } \alpha = \frac{\text{Lm für Bas. a} \times \text{L}\alpha \text{ für Bas } \alpha}{\text{L}\alpha \text{ für Bas. a}}$$

also

$$\text{Lm für Bas } \alpha = \frac{\text{Lm für Bas. a}}{\text{L}\alpha \text{ für Bas. a}} \text{ (§. 211).}$$

Hat man also die Logarithmen der Zahlen für ein System gefunden, so kann man durch sie die Logarithmen aller Zahlen für ein jedes anderes System berechnen.

§. 215.

Aufgabe.

Es soll der Logarithmus der ganzen Zahl N für die Basis a gesucht werden.

Auflösung.

Die Zahl N befindet sich in der Reihe (§. 108. 3. Zus.)

$$1;\ a;\ a^2 \ldots a^m;\ r;\ s;\ a^{m+1},$$

worinn N entweder von a eine Dignität mit einem ganzen Exponenten oder mit einem gebrochnen Exponenten ist. Im ersten Falle läßt sich N in der Reihe leicht auffinden und daher auch ihr Logarithmus angeben. Im zweiten Falle liege N zwischen a^m und a^{m+1} und sey gleich r, so ist ihr Logarithmus gleich $\frac{2m+1}{2}$ (§. 108. 3. Zus.). Sollte aber N grösser als r, aber kleiner als a^{m+1} seyn, so sey N = s, also gleich $a^{\frac{4m+3}{4}}$ (§. 108. 3. Zus.), folglich $LN = \frac{4m+3}{4}$. Läge N in der Mitte zwischen r und s, so wäre $N = a^{\frac{8m+5}{4}}$, folglich $LN = \frac{8m+5}{4}$. Ist also N in der Mitte zwischen a^m un-

a^{m+1} und daher gleich r; so ist sie die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen a^m und a^{m+1} und ihr Logarithmus ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl, zwischen dem Logarithmus von a^m und a^{m+1}. Ist N = s, so ist sie die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen r und a^{m+1}, und ihr Logarithmus ist die mittlere arithmetische zwischen dem Logarithmus von r und von a^{m+1}. Liegt N in der Mitte zwischen r und s, so ist N die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen r und s, und ihr Logarithmus ist die mittlere arithmetische zwischen dem Logarithmus von r und von s.

Hieraus erhält man folgende Regel:

Wenn man den Logarithmus von N für die Basis a finden will und N von a keine Dignität mit einem ganzen Exponenten ist, so untersuche man, zwischen welchen beiden Gliedern der obigen Reihe die Zahl N liegt. Sie sey daher grösser als a^m, aber kleiner als a^{m+1}; so liegt sie offenbar zwischen diesen beiden Zahlen. Nun suche man r und den dazu gehörigen Logarithmus, oder welches einerlei ist, man suche die mittlere geometrische Proportionalgrösse zwischen a^m und a^{m+1} und die mittlere arithmetische zwischen den Logarithmen von a^m und von a^{m+1}. Ist N gleich der gefundenen r, so gehört auch der Zahl N der Logarithmus von r zu. Ist aber r kleiner als N, so liegt N zwischen r und a^{m+1}, und daher muss s und der Logarithmus von s gesucht werden. Sollte nun N kleiner als s seyn, so befindet sich N zwischen r und s, und dann muss wieder die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen r und s und die mittlere arithmethische zwischen den Logarithmen von r und von s gefunden werden. Diese Arbeit kann man immer weiter fortsetzen, wodurch man Zahlen bekömmt, zwischen welchen N liegen muss, die sehr wenig von einander unterschieden sind, und sich also noch weniger von N unterscheiden, so dass in dem Falle, wenn N nicht ganz genau gefunden wird, eine dieser beiden Zahlen für N und daher auch ihr Logarithmus für Log N genommen werden kann.

Anmerkung.

Die ersten logarithmischen Tafeln sind würklich auf diese mühsame Art berechnet, jetzt kennt man aber weit bequemere

Me-

Methoden, von welchen in den nächstfolgenden Paragraphen eine gezeigt werden soll.

§. 216.

Aufgabe.

Es soll zwischen dem Logarithmus und der dazu gehörigen Zahl eine allgemeine Gleichung gefunden werden.

Auflösung.

Es sey in dem Ausdrucke $1+x$, x eine unbestimmte Zahl, so kann eine jede gegebene als eine Dignität eines ganzen Exponenten von $1+x$ angesehn werden, weil x jedesmal so bestimmt werden kann, dass dieses möglich ist. Denn es sey $(1+x)^m = p$, wo m eine ganze und p irgend eine gegebene Zahl bedeutet, so ist $1+x = \sqrt[m]{p}$ und $x = -1+\sqrt[m]{p}$. Der einfachste Fall hiervon ist der, wenn $m = 2$, und $(1+x)^2 = P = 1+y$, folglich $2L(1+x) = L(1+y)$ gesetzt wird, weswegen auch m bei der Aufsuchung der allgemeinen Gleichung gleich 2 und $(1+x)^2 = 1+y$ gesetzt werden soll.

Es sey daher die Form der gesuchten Gleichung

$$L(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \dots$$

so dass A, B, C, D, E u. s. w. für ein und dasselbe System unveränderlich sind, so ist auch, wenn man $(1+x)^2 = 1+y$, also $2L(1+x) = 1+y$ setzt,

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \dots$$
$$= Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

In dieser Gleichung substituire man für y gleichgültige Werthe durch x ausgedrückt, welche nach der angenommenen Bedingung folgende sind:

$$\begin{aligned}
y &= 2x + x^2 \\
y^2 &= 4x^2 + 4x^3 + x^4 \\
y^3 &= 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6 \\
y^4 &= 16x^4 + 32x^5 + 24x^6 + \dots \\
y^5 &= 32x^5 + 80x^6 + \dots
\end{aligned}$$

so erhält man

2Ax

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \cdots$$
$$\begin{aligned} = 2Ax + Ax^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + \cdots \\ 4Bx^2 + 8Cx^3 + 12Bx^4 + \cdots \\ 16Dx^4 + \cdots \end{aligned}$$

oder

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \cdots$$
$$= 2Ax + \left.\begin{matrix} A \\ +4B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4B \\ +8C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} B \\ +12C \\ +16D \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 6C \\ +32D \\ +32E \end{matrix}\right\} x^5$$

Daher			also		
$2Ax$	$=$	$2Ax$	A	$=$	A
$A + 4B$	$=$	$2B$	B	$=$	$-\frac{1}{2}A$
$4B + 8C$	$=$	$2C$	C	$=$	$+\frac{1}{3}A$
$B + 12C + 16D$	$=$	$2D$	D	$=$	$-\frac{1}{4}A$
$6C + 32D + 32E$	$=$	$2E$	E	$=$	$+\frac{1}{5}A$

Setzt man nun diese gefundenen Werthe in die Gleichung

$$L(1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \cdots$$

so bekömmt man

$$L(1+y) = Ay - \tfrac{1}{2}Ay^2 + \tfrac{1}{3}Ay^3 - \tfrac{1}{4}Ay^4 + \tfrac{1}{5}y^5 + \cdots$$

oder

$$L(1+y) = A(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 + \cdots).$$

Diese Gleichung zeigt schon allgemein das Verhältniß des Logarithmus zu der ihm zugehörigen Zahl an, daher ist sie die gesuchte. Sie hat aber eine unbequeme Form, weil ihre Glieder mit + und — abwechseln, aus diesem Grunde soll ihr eine bequemere gegeben werden.

Man setze in ihr für $+y$, $-y$, so entsteht die Gleichung:

$$L(1-y) = A(-y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{5}y^5 - \cdots)$$

also

$$\begin{aligned} L(1+y) - L(1-y) &= A(2y + \tfrac{2}{3}y^3 + \tfrac{2}{5}y^5 + \tfrac{2}{7}y^7 + \cdots) \\ &= 2A(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \cdots) \end{aligned}$$

oder $L\dfrac{1+y}{1-y} = 2A(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \cdots).$

In

In dieser Gleichung substituire man für $\frac{1+y}{1-y}$, den Ausdruck $\frac{p+q}{p}$, also für y den Werth $\frac{q}{2p+q}$, so ist $L\frac{p+q}{p}$

$$= 2A\left(\frac{q}{(2p+q)} + \frac{q^3}{3(2p+q)^3} + \frac{q^5}{5(2p+q)^5} + \cdots\right).$$

2. Von dem natürlichen logarithmischen Systeme.

§. 217.

Erklärung.

Vermittelst der zuletzt gegebenen Gleichung, ist man leicht im Stande, den Logarithmus einer jeden Zahl zu finden, so bald A bestimmt ist. Denn setzt man z. B. in ihr $p = q = 1$, so ist

$$L2 = 2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right).$$

Es ist aber einleuchtend, dass der Logarithmus der Zahl 2 von A mit abhängt, es wird also nach der verschiedenen Annahme der Zahl A, der Logarithmus von $\frac{p+q}{p}$ auch zu verschiedenen Systemen gehören, daher A der Modulus genannt wird. Am natürlichsten ist es, A gleich 1 zu setzen, woraus die Gleichung

$$L\frac{p+q}{p} = 2\left(\frac{q}{2p+q} + \frac{q^3}{3(2p+q)^3} + \frac{q^5}{5(2p+q)^5} + \frac{q^7}{7(2p+q)^7} + \cdots\right)$$

entsteht.

Die Logarithmen, die nun hiernach berechnet werden, werden **natürliche Logarithmen** genannt, daher man auch sagt, dass die natürlichen Logarithmen **die** sind, deren Modulus gleich 1 ist.

Will-

$$y = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots$$

folglich

$$1 + y = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots$$

und $\mathrm{Lnat}(1 + y) =$

$$\mathrm{Lnat.}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots\right).$$

Es wurde aber $\mathrm{Lnat}(1 + y) = z$ gesetzt, folglich ist auch

$$z = \mathrm{Lnat}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots\right)$$

Zusatz.

Wird hier $z = 1$ gesetzt, so ist z der Logarithmus der Basis des natürlichen Systems (211.), welche β heissen mag, folglich ist

$$\beta = 2 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \cdots$$

$$= 2,71828182845904523536028747135266249775724712 \cdots$$

---

3. Von dem Briggischen oder gemeinen logarithmischen Systeme.

§. 219.

Das Briggische oder das gemeine System ist dasjenige, dessen Basis gleich 10 ist. Den ersten Nahmen führt es von Heinrich Brigg, der zu Oxford Professor der Geometrie war, weil dieser zuerst anfing, die Logarithmen für diese Basis zu berechnen. Gemeines System wird es genannt, weil man, der grossen Bequemlichkeit wegen, sich gewöhnlich seiner bedient. Die Bezeichnung der Logarithmen dieses Systems ist L Brigg. N oder Log. Vulg. N, auch schlechtweg LN, so dass man sich unter LN beständig den Briggischen Logarithmus denkt, wenn

nicht

Auflösung.

Es sey $L\,nat\,(1+y) = z$, folglich
$z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \dots = P$ (§. 216.).
Nun sey $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \dots = R$, wo also a, b, c, d, e u. s. w. noch unbekannte Zahlen, aber von der Beschaffenheit sind, dass diese Gleichung statt finden kann, so ist

$$\begin{aligned}
y &= az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \dots \\
y^2 &= a^2z^2 + 2abz^3 + \left.\begin{matrix} b^2 \\ +2ac \end{matrix}\right\} z^4 + \dots \\
y^3 &= a^3z^3 + 3a^2bz^4 + \dots \\
y^4 &= a^4z^4 + \dots
\end{aligned}$$

Diese Werthe substituire man für y in die Gleichung P, so erhält man:

$$\begin{aligned}
z = az &+ bz^2 + cz^3 + dz^4 + \dots \\
&- \tfrac{1}{2}a^2z^2 - abz^3 \left.\begin{matrix} -\tfrac{1}{2}b^2 \\ -ac \end{matrix}\right\} z^4 + \dots \\
&+ \tfrac{1}{3}a^3z^3 + a^2bz^4 + \dots \\
&- \tfrac{1}{4}a^4z^4 - \dots
\end{aligned}$$

Diese Gleichung auf o reducirt, gibt:

$$0 = \left.\begin{matrix} a \\ -1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} b \\ -\tfrac{1}{2}a^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} c \\ -ab \\ +\tfrac{1}{3}a^3 \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} d \\ -\tfrac{1}{2}b^2 \\ -ac \\ +a^2b \\ -\tfrac{1}{4}a^4 \end{matrix}\right\} z^4 + \dots$$

Folglich ist	also
$a - 1 = 0$	$a = 1$
$b - \frac{1}{2}a^2 = 0$	$b = \frac{1}{2}$
$c - ab + \frac{1}{3}a^3 = 0$	$c = \frac{1}{2 \cdot 3}$
$d - \frac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \frac{1}{4}a^4 = 0$	$d = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung R für a, b, c u. s. w., so erhält man

$y =$

$$y = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots$$

folglich

$$1 + y = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots$$

und $\mathrm{Lnat}(1 + y) =$

$$\mathrm{Lnat.}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots\right).$$

Es wurde aber $\mathrm{Lnat}(1 + y) = z$ gesetzt, folglich ist auch

$$z = \mathrm{Lnat}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \cdots\right)$$

Zusatz.

Wird hier $z = 1$ gesetzt, so ist z der Logarithmus der Basis des natürlichen Systems (211.), welche β heissen mag, folglich ist

$$\beta = 2 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \cdots$$

$$= 2,718281828459045235360287471352662497757 2 4712 \cdots$$

---

3. Von dem Briggischen oder gemeinen logarithmischen Systeme.

§. 219.

Das Briggische oder das gemeine System ist dasjenige, dessen Basis gleich 10 ist. Den ersten Nahmen führt es von Heinrich Brigg, der zu Oxford Professor der Geometrie war, weil dieser zuerst anfing, die Logarithmen für diese Basis zu berechnen. Gemeines System wird es genannt, weil man, der grossen Bequemlichkeit wegen, sich gewöhnlich seiner bedient. Die Bezeichnung der Logarithmen dieses Systems ist L Brigg. N oder Log. Vulg. N, auch schlechtweg LN, so dass man sich unter LN beständig den Briggischen Logarithmus denkt, wenn

nicht

nicht ausdrücklich gesagt ist, daſs man sich darunter den Logarithmus von N überhaupt denken, also keine bestimmte Basis zum Grunde legen soll.

§. 220.

Die Progression, die aus dem Grundverhältnisse 1 : 10 entsteht, nebst der Reihe der Logarithmen, die ihren Gliedern zukommen, ist folgende:

1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; - - -
0; 1; 2; 3; 4; 5; - - -

Da nun hier zu gröſsern Zahlen gröſsere Logarithmen, und zu gröſsern Logarithmen gröſsere Zahlen gehören (§. 208.), so ist klar, daſs die Logarithmen der Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen, eigentliche gebrochne Zahlen sind. Die Logarithmen werden aber in Decimalen berechnet; folglich müssen die Logarithmen von solchen Zahlen, die gröſser als 1, aber kleiner als 10 sind, decimaltheilige Zahlen seyn, die in der Stelle der ganzen Ziffern eine Null haben. Die Logarithmen der Zahlen, die zwischen 10 und 100 fallen, sind gröſser als 1, aber kleiner als 2, folglich decimaltheilige Zahlen mit der ganzen Ziffer 1. Eben so kann man leicht zeigen, daſs sich die Logarithmen von Zahlen, die zwischen 1000 und 10000 fallen, mit der ganzen Ziffer 3 anfangen u. s. w.

Läſst man die obige Reihe von der Einheit aus von der Rechten nach der Linken fortlaufen, so bekömmt man eine Reihe, die sich mit 1 anfangt, deren übrige Glieder aber gebrochne Zahlen sind, wovon einer jeden zum Zähler, die Einheit, und zum Nenner das Glied der andern Reihe zukömmt, welches mit ihr, als Gliede, von der Einheit eine gleiche Entfernung hat. Daher auch der Logarithmus des n^{ten} Gliedes der nach der Linken fortlaufenden Reihe, der negative Logarithmus des n^{ten} Gliedes der andern Reihe seyn muſs (§. 212. 2. Zus.). Hat also ein Decimalbruch die Zahl 10000 zum Nenner, so hat sein Logarithmus die ganze Zahl — 4.

Es zeigt also bei dem Briggischen Systeme die ganze Zahl des Logarithmus von N allemal an, von welcher Ordnung die höchste Ziffer von N ist (§. 3. u. §. 63. 1. u. 3. willk. S.) Wird also die ganze Zahl eines Logarithmus gegeben, so ist bekannt, von

 wel-

welcher Ordnung die höchste Ziffer der dazu gehörigen Zahl ist, und umgekehrt, wenn man die Ordnung der höchsten Ziffer von N kennt, so kennt man auch die ganze Zahl, welche dem Logarithmus von N zugehört. Aus diesem Grunde nennt man die ganze Zahl des Logarithmus, die Kennziffer, oder Characteristik (figura characteristica); die Decimalziffern, welche auf die Characteristik folgen, heissen des Logarithmus Mantisse (Mantissa), weil sie den Logarithmus vollständig machen. Die Mantisse befindet sich in den logarithmischen Tafeln gewöhnlich nur bis auf 7 Decimalstellen, weil diese zum Gebrauche mehrentheils hinreichend sind. Die letzte Ziffer der Mantisse findet man in den Tafeln immer um 1 vermehrt, wenn die erste der weggelassenen grösser als 5 war, weil dadurch der Fehler, der durch das Weglassen der unendlichen Reihe von Decimalziffern entsteht, geringer gemacht wird.

§. 221.

1. Es ist $L(N.10^m) = LN + L10^m = mL10 + LN = m + LN$. (§. 211. und 212.)

Wenn man also die Zahl N nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung multiplicirt, so muss man zu der Kennziffer von LN, m positive Einheiten addiren, wenn aus LN der Logarithmus von $N.10^m$ werden soll.

Umgekehrt, wenn zur Kennziffer des LN, m positive Einheiten addirt werden, so erhält man aus N die dazu gehörige Zahl, wenn man N nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung multiplicirt.

2. Es ist $N:10^m = N.\frac{1}{10^m} = N.10^{-m}$ (§. 108.), also
$L(N:10^m) = L(N.10^{-m}) = LN + L10^{-m} = -mL10 + LN = -m + LN$.

Wird daher die Zahl N nach dem Gesetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung dividirt, so erhält man aus LN, den Logarithmus des Quotienten, wenn man zur Kennziffer von LN, m negative Einheiten addirt.

Um-

Umgekehrt, wenn man zur Kennziffer des LN, m negative Einheiten addirt, so muſs man N nach dem Geſetze der Einheit von der m^{ten} Ordnung dividiren, wenn aus N die dazu gehörige Zahl werden ſoll.

§. 222.

Verſteht man unter M den Modulus des Briggiſchen Syſtems, ſo iſt $M = \frac{1}{\text{Lnat. } 10}$ (§. 217. 1. Zuſ.) Berechnet man hier $\frac{1}{\text{Lnat. } 10}$ in Decimaltheilen, ſo findet ſich der Modulus bis auf 25 Decimalſtellen gleich 0, 4342944819032518276511289. Vermittelſt dieſer Zahl können alſo die Briggiſchen Logarithmen leicht berechnet werden (§. 217. 1. Zuſ.) Um aus dem Briggiſchen Logarithmus von N, den natürlichen von N zu berechnen, muſs man LBrigg. N nach dem Geſetze von $\frac{1}{\text{Lnat. } 10}$ dividiren (§. 217. 3. Zuſ.), oder es iſt $\text{Lnat.N} = (\text{LBrigg.N}) : \frac{1}{\text{Lnat.} 10}$

$= \text{Lnat. } 10 \ (\text{LBrigg. N})$

$= (2{,}3025850929940456840179914546843642076 \, \text{--}) \text{LB.N.}$

§. 223.

Da $\text{Lnat}\left(\frac{p+q}{p}\right) =$

$$2\left(\frac{q}{(2p+q)} + \frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{q^5}{(2p+q)^5} + \frac{q^7}{(2p+q)^7} + \cdots\right)$$

ſo iſt auch $\text{Lnat}(p+q) - \text{Lnat}\, p =$

$$2\left(\frac{q}{(2p+q)} + \frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{q^5}{(2p+q)^5} + \frac{q^7}{(2p+q)^7} + \cdots\right)$$

und $\text{Lnat}(p+q) =$

$$\text{Lnat}\, p + 2\left(\frac{q}{(2p+q)} + \frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{q^5}{(2p+q)^5} + \cdots\right)$$

Folglich

$$LBrigg.(p+q)$$
$$= M.Lnat.p + 2M\left(\frac{q}{(2p+q)} + \frac{q^3}{(2p+q)^3} + \frac{q^5}{(2p+q)^5} + \cdots\right)$$
$$= M.Lnat.p + \frac{2Mq}{(2p+q)} + \frac{2Mq^3}{(2p+q)^3} + \frac{2Mq^5}{(2p+q)^5} + \cdots$$

Betrachtet man diese einzelnen gebrochnen Zahlen, so wird man leicht finden, daſs sie desto kleiner werden, je weiter sie sich von M. Lnat. p entfernen.

Es ist aber $M = 0{,}43429448 \text{----}$ (§. 222.) und $\frac{1}{2}$ ist gleich $0{,}50000000$, folglich ist M kleiner als $\frac{1}{2}$ und daher auch

$$\frac{2Mq}{2p+q} < \frac{q}{2p+q}\,;\ \frac{2Mq^3}{(2p+q)^3} < \frac{q^3}{(2p+q)^3}\,;$$
$$\frac{2Mq^5}{(2p+q)^5} < \frac{q^5}{(2p+q)^5} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun $q = 1$ und $p = 1000$, so ist $\frac{q}{2p+q} = \frac{1}{2001}$, und $\frac{q^3}{(2p+q)^3} = \frac{1}{8012006001}$. Aber $\frac{1}{8012006001}$ ist kleiner als $\frac{1}{1000000000}$, folglich da ein Tausendtelmilliontheilchen in einer decimaltheiligen Zahl erst in der 10ten Decimalstelle vorkömmt, so ist einleuchtend, daſs wenn man die Logarithmen nur bis auf 7 Decimalstellen berechnet, und $q = 1$ und $p = 1000$ ist, daſs alsdenn nicht braucht auf $\frac{q^3}{(2p+q)^3}$, also noch viel weniger auf $\frac{2Mq^3}{(2p+q)^3}$ und daher auch nicht auf $\frac{2Mq^5}{(2p+q)^5}$ u. s. w. Rücksicht genommen zu werden, sondern, daſs $LBrigg(p+q) = MLnat\,p + \frac{2Mq}{2p+q}$ gesetzt werden kann.

Setzt

Setzt man hier $\frac{2Mq}{2p+q}$, oder welches einerlei ist

$$\frac{Mq}{p+\frac{1}{2}q} = \frac{Mq}{p} + x, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{Mq}{p+\frac{1}{2}q} - \frac{Mq}{p} = \frac{Mpq}{p^2+\frac{1}{2}pq} - \frac{Mpq+\frac{1}{2}Mq^2}{p^2+\frac{1}{2}pq} =$$

$$\frac{Mpq-Mpq-\frac{1}{2}Mq^2}{p^2+\frac{1}{2}pq} = \frac{-\frac{1}{2}Mq^2}{p^2+\frac{1}{2}pq} = -\frac{M.\frac{1}{2}q^2}{p(p+\frac{1}{2}q)},$$ folglich ist auch $LBrigg(p+q) = M.Lnat\,p + \frac{Mq}{p} - \frac{M.\frac{1}{2}q^2}{p(p+\frac{1}{2}q)}$.

Wird nun auch hier $p = 1000$ und $q = 1$ gesetzt, so ist $\frac{M.\frac{1}{2}q^2}{p(p+\frac{1}{2}q)} = \frac{M.\frac{1}{2}}{1000(1000+\frac{1}{2})} = \frac{M.\frac{1}{2}}{1000(\frac{2001}{2})} = \frac{M}{1000(2001)}$ $= \frac{M}{2001000}$. Es ist aber $M < \frac{1}{2}$, folglich auch $\frac{M}{2001000} < \frac{1}{1000000}$, also kann man in dem Falle, wenn p grösser als 1000 und q höchstens gleich ist und die Logarithmen nur auf 7 Decimalstellen berechnet werden sollen, $\frac{M.\frac{1}{2}q^2}{p(p+\frac{1}{2}q)}$ bei der Berechnung aus den Augen lassen, wenn man auf einen geringen Fehler nicht Rücksicht nehmen will, oder man kann $LBrigg(p+q) = M.Lnat\,p + \frac{Mq}{q}$ setzen.

§. 224.

Lehrsatz.

Wenn eine Zahl p, die grösser als 1000 ist, von zwei andern grössern Zahlen $p+q$ und $p+Q$, die aber höchstens p um die Einheit übertreffen, subtrahirt wird, so verhält sich die Differenz zwischen p und $p+q$ zu der Differenz zwischen p und $p+Q$, wie sich die Differenz des Lp von $L(p+q)$, zu der Differenz des Lp von $L(p+Q)$ verhält.

Beweis.

Es ist $LBrigg\, p = M . Lnat\, p$, und unter der angenommenen Bedingung ist $LBrigg\, (p + q) = M . Lnat\, p + \frac{Mq}{p}$ (§. 223.)

$$\text{also auch } LBrigg\, (p + Q) = M . Lnat\, p + \frac{MQ}{p}.$$

Also der erste Unterschied der Zahlen ist $= p + q - p = q$, und der zweite Unterschied der Zahlen $= p + Q - p = Q$, folglich ihr Verhältniss $= q : Q$. Ferner

$$LBrigg\, (p + q) - LBrigg\, p = MLnat\, p + \frac{Mq}{p} - MLnat\, p = \frac{Mq}{p},$$

und

$$LBrigg\, (p + Q) - LBrigg\, p = MLnat\, p + \frac{MQ}{p} - MLnat\, p = \frac{MQ}{p},$$

daher ist das Verhältniss der Differenzen der Logarithmen gleich $\frac{Mq}{p} : \frac{MQ}{p} = Mq : MQ = q : Q$, also mit dem Verhältnisse der Unterschiede der Zahlen einerlei.

1. Zusatz.

Bedeutet B eine Zahl, grösser als 1000, die zwischen A und C liegt, so dass sie grösser ist als C, aber kleiner als A, und dass die Unterschiede dieser drei Zahlen nicht die Einheit übertreffen, so ist

$$A - C : B - C = LA - LC : LB - LC.$$

$$\text{und} \quad 1) \quad B - C = \frac{(A - C)\,(LB - LC)}{LA - LC}$$

$$\text{und} \quad 2) \quad LB - LC = \frac{(B - C)\,(LA - LC)}{A - C}$$

2. Zusatz.

B — C ist die Differenz, welche zu B addirt werden muss, wenn man B durch C finden will. LB — LC ist die Differenz, welche zu LB gefügt werden muss, wenn LC durch LB gefunden werden soll.

An-

Anmerkung.

Diese beiden Zahlen B—C und LB—LC werden Proportionaltheile genannt.

4. Von dem Gebrauche der logarithmischen Tafeln.

§. 225.

Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen der ganzen Zahlen, und zwar in den kleinern Tafeln befinden sich nur Logarithmen von 1 bis 10000, und in den größern sind gewöhnlich nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 berechnet. Soll also nach den Tafeln der Logarithmus einer gebrochnen Zahl, oder einer größern ganzen Zahl als die Tafel enthält, gefunden werden, so bedarf man noch einer besondern Anleitung, und eben dieses ist der Fall, wenn ein Logarithmus gegeben ist, der einer gebrochenen Zahl oder größern ganzen Zahl zugehört, als die Tafeln enthalten. Wir wollen daher diese Fälle einzeln durchgehen und zwar zuerst für die kleinern Tafeln, welche die Proportionaltheile nicht berechnet enthalten, und nachher für die größern Tafeln, in welchen die Proportionaltheile angegeben sind.

Gebrauch der kleinern Tafeln.

§. 226.

Aufgabe.

Den Logarithmen einer Zahl zu finden, die so viele Ziffern hat, daß sie in den kleinern Tafeln nicht vorkommt.

Auflösung.

Hier finden 4 Fälle statt.

1) Die Zahl ist von der Beschaffenheit, daß sie sich in zwei andere zerlegen lässt, deren eine jede kleiner als 10000 ist.

2) Die gegebene Zahl ist eine Primzahl.

3) Die Zahl lässt sich in Factoren zerlegen, wovon der größere als 10000 ist.

(1. 4.

4) Die gegebene Zahl ist aus Factoren zusammengesetzt, wovon einige grösser, andere aber kleiner als 10000 sind.

Erster Fall.

Man sucht die Logarithmen der einzelnen Factoren und addirt sie zu einander, die Summe ist der gesuchte Logarithmus (§. 212.).

Zweiter Fall.

Man verwandelt die gegebene Zahl in eine decimaltheilige, indem man in ihr von der Linken nach der Rechten 4 Stellen abschneidet. Zu dieser decimaltheiligen Zahl sucht man vermittelst §. 224. den zugehörigen Logarithmus und addirt zu dieses Logarithmus Kennziffer so viele positive Einheiten, als die decimaltheilige Zahl Decimalstellen hat.

Beispiel.

Es sey die gegebene Zahl, zu der man den Logarithmus sucht, gleich 8375624.

Schneidet man in ihr von der Linken nach der Rechten 4 Stellen ab, so erhält man 8375,624. Nun ist offenbar, dass der Logarithmus von 8375,624 kleiner als L8376, aber grösser als L8375 ist, folglich muss man, um den Logarithmus von 8375,624 zu erhalten, noch zu dem Logarithmus von 8375 etwas addiren, was d heissen mag. Dieses erhält man nach §. 224. 1. Zus. auf folgende Weise:

Es ist hier $A = 8376$ $\quad LA = 3.9230367$
$B = 8375{,}624$ $\quad LB = 3.9229848 + d$
$C = 8375$ $\quad LC = 3.9229848$

Folgl. ist $A-C = 1$ und $B-C = 0{,}624$ $\quad LA-LC = 0{,}0000519$
also $1 : 0{,}624 = 0{,}0000519 : LB-LC$
$= 0{,}0000519 : d$
daher $LB - LC = d = 0{,}0000323856.$

Da aber die Logarithmen nur auf 7 Decimalstellen berechnet werden, so kann man die letzten 3 Stellen 856 weglassen und dafür die 3, welche vor der 8 steht, um 1 vermehren, so dass d gleich 0,0000324 ist.

Es ist folglich $LB = L8375{,}624 = 3{,}9230172$
und daher $L8375624 = 6{,}9230172$ (§. 221.).

Anmerkung.

Es hätte auch d unmittelbar nach §. 224. 2. Zus. vermittelst des einen Proportionaltheils berechnet werden können.

Dritter Fall.

Man sucht entweder, wie bei dem zweiten Falle, sogleich den Logarithmus der ganzen gegebenen Zahl, oder man sucht nach der nämlichen Regel, die Logarithmen der einzelnen Factoren, und addirt diese zu einander.

Vierter Fall.

Hier gilt die nämliche Vorschrift, welche bei dem dritten Falle gegeben ist.

§. 227.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer decimaltheiligen Zahl zu finden.

Auflösung.

Hier finden zwei Fälle statt.

1) Die gegebene Zahl enthält noch ganze Ziffern.

2) Sie enthält keine ganzen Ziffern.

In beiden Fällen sucht man zu ihr den Logarithmus, als wenn sie eine ganze Zahl wäre. Dieser gefundene Logarithmus gehört aber einer Zahl zu, welche aus der decimaltheiligen entsteht, wenn man diese nach dem Gesetze der Einheit von der so vielsten Ordnung multiplicirt, als sie Decimalstellen hat. Will man also aus dem jetzt gefundenen den gesuchten machen, so muss man zu seiner Kennziffer so viele negative Einheiten addiren, als die gegebene Zahl Decimalstellen besitzt. (§. 221.).

1. *Beispiel.*

Es wird der Logarithmus von 23289,427 verlangt.

Man sucht den Logarithmus der Zahl 23289427. Dieser ist 7,3671588. Da aber die gegebene Zahl drei Decimalstellen hat, so ist L23289,427 = 4,3671588.

2. *Beispiel.*

Es soll der Logarithmus von 0,23289427 gesucht werden.

Es ist L23289427 = 7,3671588,

folglich L0,23289427 = $\overset{-}{1}$,3671588.

3. Beispiel.

Es wird der Logarithmus von 0,000004332 gesucht.

Es ist L4332 = 3,6366884, also L0,000004332 = −6,6366884.

Anmerkung.

Wenn ein Logarithmus eine negative Kennziffer hat, so pflegt man, vieler Vortheile im Rechnen wegen, in die Stelle der Characteristik eine Null zu setzen, und dem Logarithmus die negative Kennziffer zur Rechten anzuhängen. So wird z. B. der zuletzt berechnete Logarithmus so geschrieben: 0,6366884 − 6.

§. 228.

Aufgabe.

Vermittelst der kleinern Tafeln zu einem gegebenen positiven Logarithmus, die zugehörige Zahl zu finden.

Auflösung.

Hier finden folgende Fälle statt:

1) Die Mantisse des gegebenen Logarithmus kömmt in den Tafeln vor, aber die Characteristik nicht.

2) Die Kennziffer kömmt vor, aber die Mantisse nicht. Hier lassen sich wieder zwei Fälle denken:

  α) Die Tafeln enthalten noch grössere Kennziffern.

  β) Die Kennziffer des gegebenen Logarithmus ist die größte, die in den Tafeln vorkömmt.

3) Es kömmt in den Tafeln so wenig die Kennziffer, als die Mantisse vor.

Erster Fall.

Man sucht in den Tafeln die Mantisse unter irgend einer darinn vorkommenden Kennziffer auf, und hängt der dazu gehörigen Zahl so viele Nullen an, als die Characteristik des gegebenen Logarithmus mehrere Einheiten hat, als die besitzt, unter welcher die Mantisse aufgesucht ist. Diese Zahl gehört dem gegebenen Logarithmus zu (§. 221.).

Beispiel.

Es sey der Logarithmus 6,3996737 gegeben.

In den Tafeln findet man 2,3996737 = L251, also ist 6,399673 = L2510000.

Zwei-

Zweiter Fall α.

Man sucht in den Tafeln unter der größten darin vorkommenden Characteristik eine Mantisse auf, die zwar der Mantisse des gegebenen Logarithmus am nächsten kömmt, aber doch kleiner ist, und schneidet in der hierzu gehörigen Zahl von der Rechten nach der Linken so viele Decimalstellen ab, als die Kennziffer, worunter die Mantisse aufgesucht ist, mehrere Einheiten, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus hat (§. 221.).

Beispiel.

Es sey der Logarithmus 1, 7065702 gegeben. In den Tafeln findet man unter der Kennziffer 4 die nächst kleinere Mantisse 7065441. Da nun 4, 7065441 = L50881, so ist 1, 7065702 = L50, 881.

Zweiter Fall β.

Dieser wird vermittelst des §. 224. 1. Zus. aufgelöset.

Beispiel.

Es soll die Zahl gesucht werden, die zu dem Logarithmus 3, 8796354 gehört.

Man sucht in den Tafeln zwei Logarithmen auf, die zu zwei um 1 von einander unterschiedenen Zahlen gehören, zwischen welche der gegebene Logarithmus fällt.

Hier ist der größere	=	3, 8796692	= L7580
der gegebene	=	3, 8796354	= L7579 + D
der kleinere	=	3, 8796119	= L7579

Folglich $A = 7580$ und $LA = 3,8796692$

$B = 7579 + D$ $\quad LB = 3,8796354$

$C = 7579$ $\quad LC = 3,8796119$

Daher $A - C = 1$ und $LA - LC = 0,0000573$

$B - C = D$ $\quad LB - LC = 0,0000235$

Also $1 : D = 0,0000573 : 0,0000235$

$= 573 : 235$

$$\text{und } D = \frac{235}{573} = \frac{235,0000}{573} = 0,4101$$

folglich $3,8796354 = L7579,4101$.

Sicherer ist es aber, für 7579, 4101, die Zahl 7579, 41 zu setzen.

An-

Anmerkung.

Man hätte auch D unmittelbar durch §. 224. 2. Zus. vermittelst des Proportionaltheils berechnen können.

Dritter Fall.

Man sehe ihn für einen Logarithmus mit der höchsten Kennziffer an, der in den Tafeln vorkömmt, und suche für diesen, nach der für den vorigen Fall gegebenen Regel, die zugehörige Zahl. Diese multiplicire man nach dem Gesetze der Einheit, deren Ordnung mit der Zahl übereinstimmt, um welche die Kennziffer des gegebenen Logarithmus die höchste Kennziffer der vorliegenden Tafel übertrifft. Dieses Product ist alsdenn die gesuchte Zahl.

Beispiel.

Es sey der gegebene Logarithmus gleich 7,8796354.

Sucht man hier nach §. 224. die Zahl, welche dem Logarithmus 3,8796354 zukömmt, so findet man die Zahl 7579,41, folglich ist 7,8796354 = L75794100.

§. 229.

Aufgabe.

Vermittelst der Tafeln, zu einem gegebenen negativen Logarithmus, die zugehörige Zahl zu finden.

Auflösung.

Ein negativer Logarithmus kann nur einer gebrochnen Zahl zugehören; diese kann man aber sowohl als eine gemeine gebrochne, als auch als eine decimaltheilige Zahl darstellen; folglich kann auch verlangt werden.

1) dass man die gesuchte Zahl als eine gemeine gebrochne,

2) dass man sie als eine decimaltheilige darstellen soll.

Erster Fall.

Man sucht zu dem Logarithmus die Zahl, die ihm als positiv betrachtet zukömmt, und macht diese zum Nenner einer gebrochnen, deren Zähler gleich 1 ist. Diese gebrochne Zahl ist die gesuchte. (§. 212. 2. Zus.)

Beispiel.

Der gegebene Logarithmus sey — 3,1401937.

Nun

Nun ist 3,1401937 = L1381, folglich

$$-3,1401937 = L\frac{1}{1381}.$$

Zweiter Fall.

Man addirt zu dem gegebenen Logarithmus eine ganze positive Zahl, die grösser als er ist, und sucht zu der Summe als einem Logarithmus, die zugehörige Zahl und schneidet in dieser von der Rechten nach der Linken so viele Decimalstellen ab, als die hinzu addirte ganze Zahl Einheiten hat.

Beispiel.

Es sey der gegebene Logarithmus gleich — 3,1370375.

Addirt man hierzu 4, so hebt der negative Logarithmus einen sich gleichen Theil von 4 auf, folglich erhält man die Summe, wenn man 3,1370375 von 4,0000000 trennt. Sie ist also gleich 0,8629625. Da nun 0,8629625 = L7,2939, so ist —3,1370375 = L0,00072939.

Berechnung, Einrichtung und Gebrauch der Proportionaltheile, die in den grössern Tafeln vorkommen.

§. 230.

Wenn n eine ganze Zahl grösser als 1000 und u eine Zahl kleiner als 1 bedeutet, so ist nach §. 224.

$$L(n+1) - Ln : L(n+u) - Ln = (n+1) - n : (n+u) - n$$

also $$L(n+u) - Ln = u(L(n+1) - Ln))$$

und $$\frac{L(n+u) - Ln}{L(n+1) - Ln} = u.$$

Kennt man daher u und $L(n+1) - Ln$, so kann man die Zahl finden, welche zu Ln addirt werden muss, wenn $L(n+u)$ aus Ln gefunden werden soll, und kennt man $\frac{L(n+u) - Ln}{L(n+1) - Ln}$, so weiss man die Zahl, welche, zu n addirt, eine gesuchte Zahl $n+u$ gibt.

Sind

Sind alſo in einer Tafel u und u(L(n + 1) − Ln)) berechnet, ſo iſt man von dem mühſamen Geſchäfte befreiet, die Proportionaltheile zu berechnen. Es iſt aber auch nicht nöthig, jeden Proportionaltheil u und den dazu gehörigen u(L(n + 1) − Ln)) einzeln für ſich zu berechnen, ſondern man kann u willkührlich annehmen und nach ſeinem Geſetze (L(n + 1) − Ln) multipliciren, ſo kömmt man auf einem leichtern Wege zu ſeinem Zwecke. Daher verfährt man bei der Berechnung der Proportionaltheile folgendermaſſen: man ſucht den Unterſchied zwiſchen jeden zweien zunächſt auf einander folgenden Logarithmen, oder man ſucht jeden L(n + 1) − Ln; hierauf wird u gleich 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; u. ſ. w. geſetzt, und dann jeder L(n + 1) − Ln nach den Geſetzen dieſer u multiplicirt. Iſt dieſes geſchehn, ſo ſchreibt man dieſe u und die dazu gehörigen u(L(n + 1) − Ln)) neben einander.

Beiſpiel.

Es ſey L(n + 1) − Ln = 0,0000163, wofür man 163 ſetzt, ſo iſt

wenn u =	0, 1	0, 2	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9
u(L(n + 1) − Ln)) =	16,3	32,6	48,9	65,2	81,5	97,8	114,1	130,4	146,7

Die Ziffern nach dem Komma in den Werthen für u(L(n + 1) − Ln)) kann man nicht beibehalten, weil ſie Hundertmilliontheilchen bedeuten, da die Logarithmen, wofür ſie gelten, nur bis auf Zehnmilliontheilchen berechnet ſind.

Die Stellung, welche dieſe u, u(L(n + 1) − Ln)) und L(n + 1) − Ln in den Tafeln unter ſich haben, zeigt folgende Figur:

163	
1	16
2	33
3	49
4	65
5	82
6	98
7	114
8	130
9	147

Hier

Hier ist für 81, die Zahl 82, und für 146, die Zahl 147 gesetzt, aus dem Grunde, weil die Ziffer, welche bei ihnen weggelassen wird, mehr als 4 beträgt, denn in diesem Falle wird die geringste Ziffer der Zahl, die man hinschreibt, um 1 vermehrt.

Setzt man u = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 u. s. w., so sind die Werthe für u(L(n + 1) − Ln)) gleich 1,63; 3,26; 4,89; 6,525; 8,15; u. s. w., also zehnmal kleiner, als die vorhin gefundenen.

Setzt man u = 0,001; 0,002; 0,003 u. s. w., so bekömmt man wieder Werthe für u(L(n + 1) − Ln)), die zehnmal kleiner sind, als die nächstvorhergehenden u. s. w.

Hat man also erst die Werthe von u(L(n + 1) − Ln)), für u = 0,1; 0,2; 0,3; u. s. w. gefunden, so sind auch hierdurch die Werthe für zehnmal, hundertmal u. s. w. kleinere u bekannt. Aus diesem Grunde sind auch in den Tafeln von u(L(n + 1) − Ln)) bloss die Werthe für u = 0,1; 0,2; 0,3; u. s. w. angegeben.

Es scheint, als wenn ein verschiedenes n auch für L(n + 1) − Ln einen verschiedenen Werth geben und daher eine sehr grosse Anzahl u(L(n + 1) − Ln)) berechnet werden müsse. Dieses ist aber bei den Logarithmen von grossen Zahlen bis auf 7 und mehrere Decimalstellen nicht der Fall, und es findet desto mehr statt, je grösser n ist, so dass also die logarithmischen Differenzen sehr vieler auf einander folgenden Logarithmen mit einander übereinstimmen, und dadurch die Anzahl der u(L(n + 1) − Ln)) eingeschränkt wird.

§. 231.

Den Gebrauch der berechneten Proportionaltheile will ich durch folgende Beispiele erläutern.

1. *Beispiel.*

Es soll der Logarithmus der Zahl 35674327 gesucht werden.

In den Tafeln, welche die Logarithmen von 1 bis 100000 enthalten,

ist

ist L35674 = 4, 5523518
Proportionaltheil für 0, 8 = 98
für 0,03 = 3, 7
für 0, 002 = 0, 24
für 0, 0007 = 0, 085
Also L35674, 8327 = 4, 5523620,025
Läßt man hier 025 weg,
so ist L356748327 = 8, 5523620.

2. *Beispiel.*

Es wird der Logarithmus der Zahl 20993077 verlangt.
L20993 = 4, 3220745
Proportionalth. für 0, 0 = 0
für 0, 07 = 14, 5
für 0,007 = 1, 45
also L20993, 077 = 4, 3220760, 95.

Läßt man hier 95 weg, und setzt wegen 9 in die Stelle der Null, die vor 9 steht, die Einheit, so ist
L20993077 = 7, 3220761.

3. *Beispiel.*

Es soll die Zahl gesucht werden, die dem Logarithmus 2, 3669214 zukömmt.

In den Tafeln findet man unter den Logarithmen mit der Kennziffer 4, die nächstkleinere Mantisse 3669083, folglich ist der Unterschied zwischen der gegebenen und dieser Mantisse gleich 131. Daher ist 4, 3669214 = 4, 3669083 + 0, 0000131. Zu 4, 3669083 gehört aber die Zahl 23276, und zu 0,0000131 gehört der Proportionaltheil 0, 7, folglich ist
4, 3669214 = L23276 + 0, 7 = L23276, 7
daher 2, 3669214 = L232, 767.

4. *Beispiel.*

Es soll zu dem Logarithmus 9, 3669223 die zugehörige Zahl gesucht werden.

Sucht man die Mantisse unter den Logarithmen mit der Kennziffer 4 auf, so findet sich die nächstkleinere Mantisse 3669083, folglich ist der Unterschied zwischen dieser und der

gege-

gegebenen gleich 0, 0000140, oder es ist 4, 3669223 = 4, 3669083 + 0, 0000140. Unter den Proportionaltheilen findet sich aber nicht 140, sondern nur 131, und der Unterschied zwischen 140 und 131 ist 9, daher ist auch

$$4,3669223 = 4,3669083 + 0,0000131 + 0,0000009$$
$$= 4,3669083 + 0,0000131 + 0,00000090$$

Dem Logarithmus 4, 3669083 gehört die Zahl 23276 zu; zu 131 gehört der Proportionaltheil 0, 7, und zu 0,0000090 beinahe der Proportionaltheil 0, 5, daher nehme man zu 0,0000009 die Zahl 0,05, so ist

$$4,3669223 = L23276 + 0,7 + 0.05 = L23276,75$$

und $9,3669223 = L2327675000.$

5. *Beispiel.*

Man verlangt die Zahl zu wissen, die dem Logarithmus 8, 3669097 zukömmt.

Unter den Logarithmen mit der Kennziffer 4, befindet sich die nächstkleinere Mantisse 3669083, folglich ist

$$4,3669097 = 4,3669083 + 0,0000014.$$

Da nun die hierhergehörigen Proportionaltheile gröſser als 14 sind, so setze man

$$4,3669097 = 4,3669083 + 0,00000140.$$

Dem Logarithmus 4, 3669083 kömmt die Zahl 23276 zu, und mit 0, 0000140 correspondirt beinahe der Proportionaltheil 0, 7, also mit 0, 00000140 die Zahl 0, 07, folglich ist

$$4,3669097 = L23276 + 0,07 = L23276,07$$

und daher $8,3669097 = L232760700.$

Anmerkung.

Man sollte glauben, daſs man im 4ten und 5ten Beispiele hätte noch mehrere Ziffern der Zahl finden können, als gefunden sind. Allein man kann durch Hülfe der Tafeln, welche die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 nur bis auf 7 Decimalstellen enthalten, die verlangte Zahl nur bis auf 7 Ziffern mit einiger Sicherheit finden, weil nämlich die logarithmischen Differenzen, wie schon in §. 230. gesagt ist, immer abnehmen, so daſs sie bei 10000000 keine ganze

Einheit mehr betragen. Es ist nämlich der Logarithmus von 10000000 = 7,0000000 und auch von 10000001 gleich 7,0000000, man kann also nicht mehr richtig bestimmen, ob dem gegebenen Logarithmus 7,0000000 die Zahl 10000000 oder die Zahl 10000001 entspricht.

Dekadische Ergänzung.

§. 232.

Unter dekadischer Ergänzung versteht man überhaupt die Zahl, um welche eine Zahl kleiner ist als 10. Sie kann bei den Logarithmen mit grossen Nutzen angewandt werden, wenn mehrere Logarithmen von der Summe mehrerer anderer subtrahirt werden sollen.

Man schreibt alsdenn die zu einander addirenden Logarithmen und die dekadischen Ergänzungen der davon zu subtrahirenden unter einander, addirt dann alle diese über einander stehenden Zahlen und zieht von der Kennziffer der Summe so oft 10 ab, als dekadische Ergänzungen vorhanden sind. Das Resultat ist die verlangte Differenz.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus folgenden:

Es mögen die zu einander addirenden Logarithmen M, N und O und die von der Summe zu subtrahirenden P, Q, R und S seyn, so sind die dekadischen Ergänzungen der letztern gleich $10 - P$, $10 - Q$, $10 - R$ und $10 - S$. Werden diese zu $M + N + O$ addirt, so erhält man

$$M + N + O + 10 - P + 10 - Q + 10 - R + 10 - S = M + N + O - P - Q - R - S + 10 + 10 + 10 + 10.$$

Wird also von dieser Summe so oft 10 subtrahirt, als dekadische Ergänzungen vorhanden sind, so entsteht

$$M + N + O - P - Q - R - S,$$

welches auch die verlangte Differenz ist.

Beispiel.

Es soll der Werth von

L91512 + L0,00347 + L7649 — L6950 — L9156

gesucht werden.

	L91512	=	4,9614780
	L0,00347	=	0,5403295 − 3
	L7,649	=	3,8836047
Dek. Erg.	L.6950	=	6,1580152
Dek. Erg.	L.9156	=	6,0382942
	Summe	=	21,5817216 − 3

Hiervon 2 . 10 = 20 subtrahirt, gibt den Werth der gesuchten Differenz = 1,5817216 − 3
= 0,5817216 − 2.

Anmerkung.

Die Auflösung der Aufgabe des §. 227. und §. 229. gilt sowohl für die kleinern als grössern Tafeln.

Zusatz zu §. 203. 4. Zus.

Wenn in $S = (a+u)\frac{n}{2}$, für u der Ausdruck $a + (n-1)d$ gesetzt wird, so wird

$$S = (a+a+(n-1)d)\frac{n}{2}$$
$$= (2a + (n-1)d)\frac{n}{2}.$$

Setzt man in dem letzten Ausdrucke, $d = m - 2$ und $a = 1$, so erhält man:

$$S = (2 + (n-1)(m-2))\frac{n}{2}.$$

Nun ist aber $(n-1)(m-2) = (mn-m-2n+2)$,

also auch
$$S = (2+(mn-m-2n+2))\frac{n}{2}$$
$$= (4 + mn - m - 2n)\frac{n}{2}$$
$$= \frac{4n + mn^2 - mn - 2n^2}{2}$$
$$= \frac{mn^2 - 2n^2 + 4n - mn}{2}$$
$$= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2} = P.$$

* * *

Aufgabe.

Die Einheiten von P, durch Punkte ausgedrückt, so zu ordnen, dass sie, durch grade Linien verbunden, $n-1$ in einander geschobene reguläre $m$ecke bilden, von welchen jede Seite des ersten, zwei, jede Seite des zweiten, drei, jede Seite des dritten, vier u. s. w. jede Seite des $n-1^{\text{ten}}$ $m$ecks n Punkte enthält, welche in jeder Seite eines jeden $m$ecks so geordnet sind, dass zwei zunächst auf einander folgende die Entfernung unter sich haben, welche sich zwischen den beiden Punkten einer Seite des ersten $m$ecks befindet.

Auflösung.

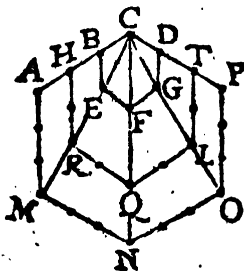
1) Man macht ein reguläres m eck CBEFGDC, verlängert die beiden Seiten CB und CD und zieht die Diagonallinien CE, CF und CG, die ebenfalls verlängert werden. C wird durch einen Punkt angedeutet.

2) Es wird CA gleich (n−1)CB gemacht, folglich wird CA eine Linie, die in n−1 gleiche Theile getheilt ist, wovon ein jeder gleich CB ist. Die Endpunkte dieser Theile werden durch Punkte angegeben.

3) Aus den Theilungspunkten B, H, A werden Linien parallel mit BE gezogen, welche CM in R und M schneiden mögen. Durch diese Durchschnittspunkte zieht man wieder Linien mit EF parallel, welche CN in Q und N schneiden, und von Q und N aus werden wieder Linien mit FG und QL parallel gezogen u. s. w., bis man zu den Parallellinien LT, OP u. s. f. kömmt. Die Durchschnittspunkte der Diagonalen und der Linie CP werden ebenfalls mit Punkten bezeichnet.

4) Wenn man BE, EF u. s. f. die ersten Parallellinien, also HR, RQ u. s. w. die zweiten, und folglich nach diesem Gesetze AM, MN u. s. w. die n−1ten Parallellinien nennt, so müssen die zweiten Parallellinien in zwei, die dritten in drei und so überhaupt die n−1ten Parallellinien in n−1 Theile getheilt und die Theilungspunkte durch Punkte bezeichnet werden.

Ist dieses geschehn, so ist die Summe aller bezeichneten Punkte gleich der Summe der Einheiten von P, und sie haben unter sich die verlangte Ordnung.



Beweis.

Die Sätze, welche bewiesen werden müssen, sind folgende:

α) Daſs durch das vorgeschriebene Verfahren $n-1$ in einander geschobene reguläre m ecke entstehn.

β) Daſs jede Seite des $q-1^{ten}$ m ecks, q Punkte enthält, und daſs diese Punkte in jeder Seite die Entfernung unter sich haben, daſs allemal zwei zunächst auf einander folgende um CB von einander entfernt sind.

γ) Daſs die Summe der Punkte, welche nach dem vorgeschriebenen Verfahren bezeichnet sind, gleich der Summe der Einheiten von P ist.

Ad α.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet folgendermaſsen: Es gibt so viele Vielecke, als CA gleiche Theile besitzt, wovon ein jeder gleich CB ist, folglich gibt es $n-1$ Vielecke. Diese sind der Figur CBEFGDC ähnlich, weil sie dadurch entstanden sind, daſs man mit den Seiten BE, EF, FG und GD Parallellinien zog, folglich sind sie auch reguläre m ecke.

Ad β.

Zwei Theile von CA gehn auf die Seite CH des zweiten m ecks; drei Theile gehn auf die Seite CA des dritten m ecks u. s. w., so daſs $q-1$ Theile auf die Seite des $q-1^{ten}$ m ecks gehn, welche mit der Linie CA zusammen fällt. Eben dieses läſst sich leicht von der Seite des $q-1^{ten}$ m ecks zeigen, welche mit CP zusammen fällt. Die übrigen Seiten des $q-1^{ten}$ m ecks sind Parallellinien und zwar die $q-1^{ten}$, folglich sind sie in $q-1$ gleiche Theile getheilt, wovon ebenfalls ein jeder gleich CB ist. Es sind aber in jeder dieser Linien die Theilungspunkte und Endpunkte durch Punkte bezeichnet, folglich muſs eine jede q Punkte besitzen, und diese müssen nach dem vorhergehenden die Ordnung unter sich haben, daſs allemal zwei zunächst auf einander folgende um CB von einander entfernt sind.

Ad. γ.

Rechnet man CA und CP zu den Diagonallinien und zählt den Punkt C nicht zu ihren Punkten; nennt man ferner nur diejenigen Punkte, Punkte der Parallellinien, welche

sich

sich bloss in diesen Linien, also nicht auch in den Diagonalen befinden, so ist einleuchtend, dass die Punkte aller Diagonalen, nebst dem Punkte aller Parallelen und dem Punkte C, gleich der Summe der Punkte aller n − 1 Vielecke seyn müsse. Es kömmt also nur darauf an, die Summe der Punkte der Parallelen und die Summe der Punkte der Diagonalen zu bestimmen, und die Summe dieser beiden Summen und des Punktes C mit P zu vergleichen.

Summe der Punkte der Diagonallinien.

Das m eck ACPONMA hat m − 1 Diagonallinien; jede Diagonallinie besitzt aber n − 1 Punkte, folglich besitzen alle Diagonallinien überhaupt (m − 1) (n − 1) Punkte.

Summe der Punkte der Parallellinien.

Das m eck ACPONMA besitzt so viele Dreiecke, als das m eck CBEFGDC enthält, folglich besteht es aus m − 2 Dreiecken, wovon ein jedes, vermöge der Construction, n − 1 Parallellinien hat.

Die erste Parallele eines jeden Dreiecks hat		0 Punkte
- - zweite	— — — — — — —	1 Punkt
- - dritte	— — — — — — —	2 Punkte
- - vierte	— — — — — — —	3 Punkte
- - — —	— — — — — — —	— —
- - n − 1te	— — — — — — —	n − 2 Punkte,

folglich ist die Summe der Punkte aller Parallelen eines Dreiecks gleich $(n-2)\frac{(n-1)}{2}$, und daher die Summe der Punkte aller Parallelen gleich $(n-2)\left(\frac{n-1}{2}\right)(m-2)$.

Summe der Punkte der Parallellinien, der Punkte der Diagonallinien und des Punktes C.

Die Summe der Punkte der Diagonallinien ist gleich (m−1)(n−1); die Summe der Punkte der Parallellinien ist gleich $(n-2)\left(\frac{n-1}{2}\right)(m-2)$, folglich ist die Summe der Punkte aller m ecke überhaupt

= (m−1)

$$= (m-1)(n-1) + 1 + \frac{(n-2)(n-1)(m-2)}{2}$$

$$= \frac{2(m-1)(n-1) + 2 + (n-2)(n-1)(m-2)}{2}$$

$$= \frac{2mn - 2m - 2n + 2 + 2 + mn^2 - 3mn - 2n^2 + 6n + 2m - 4}{2}$$

$$= \frac{2mn - 2n + mn^2 - 3mn - 2n^2 + 6n}{2}$$

$$= \frac{mn^2 - 2n^2 - mn + 4n}{2}$$

$$= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2} = P.$$

Anmerkung.

Weil sich die Einheiten von P in m ecke ordnen lassen, wie die gegebene Aufgabe es verlangt, so nennt man sie eine m eckige Zahl und sagt, daſs ihre Seite gleich n sey, weil jede Seite des m ecks ACPONMA, n Punkte hat.

Die allgemeine Benennung der m eckigen, p eckigen, q eckigen Zahlen u. s. w. ist P o l y g o n a l z a h l.

So sehr ich mich auch bemühet habe, diese Schrift Druckfehler frei zu machen, so habe ich doch wegen der Entfernung des Druckorts, meinen Zweck nicht erreichen können. Die Druckfehler, wovon ich für nöthig halte, daß sie vor dem Anfange des Lesens corrigirt werden, enthält folgendes Verzeichniß, worin Pagina, durch P, und Zeile, durch Z angedeutet wird:

Ort.	Fehler.	Verbesserung.
P. 8. §. 11. Z. 2	Ziffer	Zahl
P. 21. 4. Zus. Z. 2	m in Hinsicht auf 1 ist	1 in Hinsicht auf m ist
P. 36. Z. 1	§. 33. Zus.	§. 31. Zus.
P. 37. Z. 18	n + 1ten Ordnung	n — 1ten Ordnung
P. 38. Z. 26	§. 32.	§. 33.
P. 40. Z. 22	§. 21.	§. 20.
P. 45. Z. 28	36200000	3620000
P. 67. Z. 15	$\frac{6}{26}$	$\frac{3}{20}$
- - - Z. 25	$\frac{216}{720}$	$\frac{108}{720}$
P. 76. Z. 2	z mal	n mal
P. 87. 2. Beisp.	8000	800
P. 108. Z. 7	D so durch C	C so durch D
- - - Z. 8	wie B aus A	wie A aus B
P. 109. 4. Zus. Z. 4	dritte Gl. zum vierten	vierte Gl. zum dritten
- - - §. 91. Bew. Z. 3	e eine ganze Zahl	e eine ganze oder vermischte Zahl
P. 133. Zus. Z. 1	$a^{\frac{m}{n}}$	$a^{\frac{p}{q}}$
- - - - - - -	$a^{-\frac{p}{q}}$	$a^{-\frac{m}{n}}$
P. 134. §. 120. Z. 2	das Divid. zum Quot	der Quot. zum Divid.
P. 203. Z. 3	$9c^2m$	$\frac{9c^2m}{2}$
P. 221. Bew. Z. 7	(§. 202. 1. und 2. Zus.)	(§. 202. 1. Zus.)
- - - 2. Zus. Z. 5	(§. 202. 1 Zus.)	(§. 202. 2. Zus.
P. 222. 4. Zus. Z. 5	so ist auch	daher auch
- - - 5. Zus. Z. 1	(§. 202. 1. Zus.)	(§. 202.)
P. 224. Z. 5.	zweiten - - - der ersten	ersten - - - der zweiten
P. 231. Z. 3	(§. 107. 4. Erkl.)	(§. 108. 5. Zus.)
- - - Z. 4	(§. 108. 5. Zus.)	(§. 108. 6. Zus.)
P. 243. §. 223. Z. 1	$Lnat\left(\frac{p+q}{q}\right)$	$Lnat\left(\frac{p+q}{p}\right)$
P. 251. Z. 11	Kennziffer 4	Kennziffer 3
- - - Z. 12	Mantisse 7065642	Mantisse 7065471
- - - Z. 12	4,7065642 = L50882	3,7065471 = L5088
- - - Z. 13	1,7065702 = L50,882	1,7065702 = L50,88

